Staatl. Bibliothek Regensburg
1792

Breviarium ex Algebra

Pertinet ad me
Andream Lex
Rhetorices Imi
anni Studiosum
Monachii 1805

Exlibris Baronis
de Drechsel

Anfangsgründe

der

Arithmetik

und

Algebra

zum

Gebrauch der Schulen

in den

churbaierischen Landen

München 1776
Gedruckt und zu finden in der churfürstl. akademischen Buchdruckerey

Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra.

Imprimatur.

Sig. München in dem Churfürstl. Bücher=Censur-Collegio den 22. Merz 1776.

Wilhelm Wodiczka Secret.

Staatl. Bibliothek
Regensburg

Bey der gegenwärtigen für die Wissenschaften so glücklichen Epoche (a) wurden in unserm Vaterlande durch die besondere landesväterliche Vorsorge Sr. **Churfürstl. Durchlaucht unsers gnädigsten Herrn** zur Verbesserung des öffentlichen Erziehungs- und Unterrichtswesens die heilsamsten Anstalten und Verordnungen getroffen. Diese sowohl als die eifrigen Bemühungen einsichtsvoller Patrioten haben selbst Ausländer auf den Fortgang der gemachten Schulverbesserungen aufmerksam gemacht (b).

Da vorhin in den Mittelschulen die Lehre mathematischer Kenntnisse bey Seite gesetzt wur-

de — obschon die größten Männer jederzeit dafür gehalten haben, daß man die Schuljugend nicht frühe genug mit denselben bekannt machen könne (c) — so wurde zwar in dem jetzigen Schulplane festgesetzet, den Unterricht der ersten mathematischen Anfangsgründe nach dem Beyspiele anderer neuen Schulverordnungen (d) auch in die niedern lateinischen Schulen einzuführen, und auf die beste Weise zu treiben. Aber aus eben dieser Ursache sind unsere jetzigen Logiker oder diejenigen, die in obern Schulen die Mathematik studiren, noch nicht so weit gelangt, daß man ihnen jetzt schon die Lehrbücher ausländischer großer Mathematikverständigen vorlegen könnte. Unsere Bedürfnisse erforderten eines, das den Umständen angemessen wäre. In dieser Absicht erhielt ich den Auftrag, zweckmäßige Lehrbücher von der **reinen Mathematik**, von der **Naturgeschichte** und **Naturlehre** zu verfertigen. Davon liefere ich nun das erste: **Die Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra.**

Von der Lehrart in mathematischen Wissenschaften habe ich meine Gedanken in einer besondern Schrift geäußert. Ich habe also über

die Art der Verfassung des gegenwärtigen Lehrbuches sehr weniges zu erinneren. — Ich finde mich gänzlich überzeugt, daß in lateinischen Schulen, in welchen sich die Jugend dem gelehrten Stande widmet, und also ihr Verstand zum Denken angeführt werden soll, die Anfangsgründe der reinen Mathematik scientifisch (e), und zwar nach der wahren geometrischen Lehrart (Wer versteht hier nicht des **Euklides** seine?) gelehret werden müssen (f).

Aus diesem Grunde, habe ich mich beflissen, schon in dem arithmetischen Lehrbuch die Strenge der Beweise, so viel möglich, beyzubehalten. Aber eben darum, daß diese Blätter Anfängern nur zur Grundlage des ferneren mathemathischen Studiums dienen sollten, so mußte in denselben der Binomialsatz, und was zu ihm gehört, die Lehre von höhern Gleichungen, eine weitläuftige Untersuchung über die Lehre der Logarithmen (derer Anwendung in den Anfangsgründen der Trigonometrie vorkömmt) u. s. w. wegbleiben. Manche Sätze sind aus dem nämlichen Grunde auch in der Algebra durch bestimmte Größen bewiesen worden. Anfängern wird es oft schwer, den Beweis einzusehen, wenn

unbestimmte allgemeine Größen gebraucht werden. Haben sie aber einmal die Wahrheit in solchen Fällen, wo bestimmte Größen gebraucht werden, eingesehen, so wird es leicht, den Satz allgemein auszudrücken. Die Beweise verlieren dadurch nichts. Wer da beweiset, daß $a^2 \times a^3 = a^5$, der beweiset dieß nicht allein von a^2 und a^3, sondern auch von jeder andern Potenz, die statt a^2 und a^3 gesetzt wird. Es ist so viel, als wenn man gesetzt hätte $a^m \times a^n = a^{m+n}$, denn m und n sollten ja auch jede Zahl ausdrücken. Allgemeine Wahrheiten lassen sich überhaupt besser einsehen, wenn man erst besondere Fälle betrachtet hat (g).

Die Regula Quinque, Septem, u. s. w. ist mit gutem Vorbedacht aus der Arithmetik weggelassen, und in den Anfangsgründen der Algebra vorgetragen worden. Man hat erfahren, daß die, welche auf die gewöhnliche Art solche Aufgaben berechnen, mehr Zeit und Mühe brauchen, als andere, welche die Arithmetik nur praktisch gelernet haben. Ja viele suchten wohl gar erst Formeln auf, wornach sie solche Aufgaben berechnen, und werden von Unstudirten beschämt. So wie man sie in der Algebra

vorgetragen findet, ist es sehr leicht, Aufgaben aufzulösen (h).

Auch die **Kettenregel**, die man im gemeinen Leben mit so großem Vortheile anwendet, und die gemeiniglich von Schriftstellern übergangen wird, findet man daselbst, nach dem Beyspiele des Herrn **Eulers**, etwas weitläuftig erkläret (i). Wenn man es für Anfänger nicht zu schwer gehalten hätte, würden ebenfalls die Interesserechnungen, wovon H. **Euler** handelt, und auch in **Malers** Algebra viele Beyspiele anzutreffen sind, vorgekommen seyn.

Am Ende dieser Anfangsgründe habe ich nach dem Beyspiele einiger Götting. Gelehrten eine **kurzgefaßte Geschichte** der vorgetragenem Disciplin angehängt; so wie ich in den Anmerkungen manchmal **Schriftsteller** angeführt habe, um Anfänger anzulocken, ihre Werke mit der Zeit selbst zu lesen. Dieses werde ich auch bey den folgenden Lehrbüchern beobachten. Da man sich bey Verfaßung eines Handbuches in Ansehung litterarischer Kenntnisse zu sehr einschrenken muß, so kann das Unvollständige der Geschichte sowohl als der Bibliographie durch den

Vortrag des Lehrers oder durch Nachlesung guter Schriften (k) ergänzet werden.

Endlich muß ich noch erinneren, daß ich wegen Beschleunigung dieser Arbeit die Correctur nicht selbst besorgen konnte. Man kann also die etwa in diesen mathemathischen Lehrbüchern vorkommenden Druckfehler nicht auf meine Rechnung setzen. In letztem Bande der mir zur Verfaßung aufgetragenen Lehrbücher; nämlich in den **Anfangsgründen der Naturlehre**, werde ich von den erheblichsten eine Anzeige machen.

München den 20. Jenner 1776.

L. G.

---

a) S. des deutschen Merkurs 1773. IV. Bandes drittes Stück pag. 282.

b) S. unter andern die letztern Bände der allgemeinen deutschen Bibliotheck; der Nördlinger Schulbibliotheck u. a. gelehrte Journale. — Man vergebe mir die diesem Vorbericht angehangten Citationen. Gewisse Umstände können ein obschon aus der Mode gekommenes Verfahren rechtfertigen. In dem Buch selbst wird man mich eben nicht einer Citirsucht beschuldigen können.

c) *Quinctilianus* quidem hanc opinionem semper fuisse tradit, Instit. Orat. L. I. c. 10. in Geometria

tria partem esse vtilem teneris aetatibus: agitari namque animos, atque acui ingenia, & celeritatem percipiendi inde venire: sed prodesse eam, non vt ceteras artes cum perceptae sint, sed cum discatur. *Platonem* autem satis constat, ne admittere quidem ad disciplinam suam voluisse, qui non Geometria percipienda subactum ingenium afferret. — Idque poterat intelligi ex eo, quod *Xenocrates*, vt est apud Laertium diogenem IV, 10, repudians adolescentem disciplinae suae cupidum, quod a Geometria rudis esset, rationem adjecit hanc: *πὸ χου ὀ χυάπτω*, *lanam non carmino* — Quam ob rem, cum sit magistris scholarum hoc imprimis datum negotii, vt pueriles animos ad grauiores disciplinas praeparent, quae intelligentia magis, quam sensibus continentur: magnum sane *tenerae aetati* ad eas rite percipiendas adjumentum adjungent, si eorum ingenia mathematicae disciplinae seueritate subegerint *Jo. Aug. Ernesti in Initiis doctrinae solidioris. Editio quinta Lips.* 1769. *Praef.* — Locke, da er in seiner Schrift (de l'Éducation des Enfans) vom Unterricht in der Mathematik redet, sagt: „Das ist gewiß, es kann ein Mensch nicht zu viel davon wissen, noch zu vollkommen darin seyn. Man sollte daher anfangen, einen Knaben dieselbe zu lehren, so bald und so weit er dazu fähig ist „. Noch eine Stelle aus Chalotais. „ Socrates rieth, die Mathematik in dem zartesten Alter zu lernen. Erfahrung und Schlüße beweisen, daß Kinder diese Wissenschaften zu erlernen im Stande sind. — — Keine Wissenschaft ist der Wißbegierde der Kinder, ihrem Character und ihrem Temperament angemeßner. — — Der Hauptgrund, die Kinder darin zu unterrichten, ist, weil diese Wissenschaft zur Abbildung des Verstandes so große Dienste leistet „. Mr. de la Chalotais Essai d'Education nationale, ou Plan des Etudes pour la Jeunesse. 1763. Chap. IV. — S. auch Abbtens Gedanken von Einrich-

richtung der ersten Studien, Leipzig und Berlin 1767. Ehlers Gedanken von den zur Verbesserung der Schulen nothwendigen Erfordernißen. Altona und Lübeck 1766. I. Abschn. §. 20. Die Erinnerungen über einen wichtigen Gegenstand. Prag 1773. von §. 99. bis §. 111. Basedows Vorrede zu seinen bewiesenen Grundsätzen der reinen Mathematik. Leipzig. 1774. u. a. m.

d) Die Maynzer- und Wienerischen Schulplane, die den mathematischen Unterricht gleichfalls in die niedern Schulen aufgenommen haben, sind bekannt. S. auch Verzeichniß der Lectionen, welche der auf dem königl. Pädagogio zu Jlfeld studirenden Jugend (nach Heynens Vorschlägen) gegeben werden. 1771. Erneuerte Schulordnung für die chursächsischen drey Fürsten- und Landschulen. Dresden 1773. Schulregiement für die Universität in Breslau und die katholischen Gymnasien in dem Herzogthum Schlesien und der Grafschaft Glatz. 1774. Entwurf der Einrichtung des von Sr. hochfürstl. Durchl. dem Herzoge von Curland in Mietau neugestifteten Gymnasiums. Mietau. 1774. Nachricht von der auf Sr. Majestät unmittelbaren Befehl bey der königl. Ritterakademie zu Liegnitz im Jahre 1774. gemachten neuen Einrichtung der niedern, mittlern und hohen Schulen zu Fulda. 1774. — So viele Beyspiele vortreflicher Schuleinrichtungen wären schon hinlänglich, zu zeigen, wie preiswürdig die getroffene Schulanstalt sey, vermöge welcher der Unterricht der ersten mathemathischen und philosophischen Kenntniße in unsre Mittelschulen eingeführt wurde, wenn auch andere Gründe nicht vorhanden wären, die doch so häufig aus der Beschaffenheit der Sache selbst können hergenommen werden; z. B. daß nach Chalotais, Abbtens, Basedows und aller Scholarchen Ausspruch todte und ausländische Sprachen nicht bloß

als Sprachen sollen getrieben, sondern wegen der darin enthaltenen Realkenntniße in Schulen gelehret werden; daß schon in den niedern Schulen die Jugend zur gründlichen Lehre in der Philosophie und Mathematik müsse vorbereitet werden, da der Vortrag auf hohen Schulen vorläufige Kenntnisse derselben voraus setzet; daß selbst nach Rousseau, der doch so manche Gegenstände des frühen Unterrichts als schädlich und unnütz verwirft, kein schicklicher Mittel sey, die Jugend zum Denken anzuführen, als die geometrischen Lehren; daß sogar die Erklärung der klasischen Schriftsteller, Kenntnisse nicht nur aus der Historie, als auch aus dem mathematischen und philosophischen Fache voraus setze. Selbst Heyne, dieser so berühmte Philolog, bekennt, daß er bey Ausarbeitung seines vortreflichen Commenters zu Virgils Werken, sich öfters bey Kästnern Raths erholen mußte. u. s. w. — Ich muß hier abbrechen, doch bin ich bereit, diese Gründe, wenn es nöthig seyn sollte, mehr auseinander zu setzen, und sie durch andere zu bestättigen. — Dieß will ich nur noch bemerken, daß nach der Vorschrift aller angeführten Schulverordnungen die Lehrer nicht nach den Classen, sondern nach den verschiedenen Fachen der Lehrgegenstände eingetheilet werden. Denn wo sollte man wohl so viele Polyhistors finden, die in so verschiedenen Fachen bewandert, und in jedem gleich stark wären? Oder sollen etwa superficiele Kenntniße für einen Lehrer der Jugend hinreichend seyn?

e) „Alles, was man in der Mathematik auf die entgegengesetzte (unscientifische) Art erlernen würde, wären keine Anfangsgründe der Mathematik, sondern etwas sehr unzusammenhängendes, wobey man zu letzt doch immer von neuem anfangen müßte, sagt der Verfasser der vorerwehnten Erinnerungen über einen wichtigen Gegenstand p. 190 und §. 103. — Wenn sie (die Arithmetik) gründlich beygebracht, worden wäre, so könnte es zwar geschehen, daß man sich auf einen

Augenblick einer oder der andern Operation nicht entsinnen könnte, aber man würde bey dem, was man durch Beweise gelehrt worden ist, nur wieder auf die Anfangsgründe zurück gehen dürfen, um sich in die Operation zu finden. — Ein Zögling, der nicht beybehält, was er nach Grundsätzen gelernet hat, würde ohnehin nur zu einem Tagelöhner taugen.„ — Resewitz, obschon er nur von der Erziehung des Bürgers schreibt, fodert dennoch, daß die mechanische Lehrart des Rechenmeisters mit der aufhellenden, und raisonirenden des Mathematikers immer verbunden werde: diese macht die Natur und Eigenschaften der Zahlen, ihre Vermehrung und Verminderung, und ihr Verhältniß aus wohlgewählten Beyspielen begreiflich. — Der mechanische Rechenmeister weis sich nicht zu helfen, wenn es auf deutliche Erkenntniß der Eigenschaften und Verhältnisse der Zahlen im allgemeinen ankömmt. — Die vortreflichen Verfasser der allgemeinen deutschen Bibliothek äußern bey jeder Gelegenheit ihre Meinung, daß ein mathematisches Lehrbuch ohne demonstrative Lehrart nichts tauge. S. 5. B. I. Stück 300. Seite; 11. B. I. St. 297. S.; 12. B. I. St. 319. S.; 21. B. II. 559. S.; 22. B. I. St. 248. S.; 24. B. II. St. 531. S.; 26. B. II. St. 505. S. u. s. w.

f) „Und nun, sagt Abbt in der angeführten Schrift, pag. 60, kömmt es bloß auf die Methode an. Da die mathematischen Wahrheiten gemeiniglich nicht von den leichtesten sind, indem sie uns in ein ganz neues Feld führen; so haben viele gesucht, die Strenge der Beweise zu mildern, und sie in einem leichtern Anzuge, mit einem weniger ernsthaftern Ansehen uns zuzuführen. Sollten wohl diese Männer uns einen wahren Nutzen verschaffen? Man muß mir erlauben, daß ich daran zweifle. Es ist unstreitig, daß wir die Mathematik über kurz oder lang nach der ganzen Strenge ihrer Beweise fassen müssen. Allein der erste Eindruck, den

ge=

gewisse Dinge auf uns machen, bleibt beständig. Wenn wir also die mathematischen Wahrheiten nicht vollständig begriffen haben, so werden wir immer uns selbst widerlegen müssen; eine Arbeit, die uns weit mehr Mühe kosten wird, als eine gründliche Erklärung vom ersten Anfange würde erfordert haben. Ich muß es also bekennen, daß ich mit den Anfangsgründen des Herrn von Segners meinen Untergebenen gleich zu erst bekannt machen würde „. Wer hat aber die Methode der ältern Geometern besser eingesehen, und glücklicher angebracht, als der Herr geheime Rath von Segner in seinen mathemathischen Anfangsgründen? Daselbst giebt er eine der Hauptursachen an, warum so wenige es zu einer Höhe und Stärke in der Mathematick bringen, indem er sagt, diese sey darin zu suchen: daß sie mit großer Mühe solche Dinge lernen, welche sie künftig mit noch größerer Mühe aus ihrem Gedächtniß vertilgen müssen, wenn sie jemals wahre Mathematikverständige werden wollen. Denn so lange sie mit diesen Begriffen angepropfet sind, können sie weder aus den Schriften gelehrter Männer, noch aus dem mündlichen Unterricht eines geschickten Lehrers einigen Nutzen ziehen, indem sie gerade das Gegentheil von demjenigen hören und lesen, was vorgetragen wird. — Locke will, daß man gleich beym ersten Unterricht der Geometrie die ersten sechs Bücher des Euklides dem Lehrlinge vorlesen soll (S. dessen erwehnte Schrift Abschn. XXII. §. 181.). Und Segner bringt so gar in Vorschlag, daß man in öffentlichen Schulen den Euklides lieber aus dem Original lesen soll (S. dessen Vorrede zu den ersten sechs Büchern der geometrischen Anfangsgründe des Euklides, zum Gebrauche der Schulen aus dem Griechischen übersetzt durch . . . L. Halle 1773.) S. auch des H. Kästners Vorrede zu seinen mathematischen Anfangsgründen. Item Ernesti loco cit. pag. XIII. " Itaque etiam, vt auctor est Plutarchus, in Symposiacis VIII, 2, idem ille Plato, solebat grauiter

reprehendere eos, qui Geometriam, vt faciliorem redderent, ad sensus reuocare instituerent; quod ita tolleretur id, quod in ea discenda maxime propositum esse deberet„. — Nicht nur die Herrn Hausen, Segner, Kästner und Karsten haben gesucht, die mathematische Lehrart zu der Simplicität und dem Geist der Alten zurücke zu führen, sondern auch in andern mathematischen Lehrbüchern, z. B. der HH. Clemms, Funkens, Malers, Eberts, u. a. kann man diese rühmliche Bemühung wahrnehmen. Herr Clemm insbesondere hält über die gewöhnlichen Lehrbücher der Mathematik ein strenges Gericht. — Hierüber verdient auch Herr Büsch, der im zweyten Theile seiner Encyclopedie der historischen, philosophischen, und mathematischen Wissenschaften Seite 21. und folg. sowohl die Veranlassungen, warum die Neuern die Euklideische Methode verlassen hatten, kurz anführet, als auch die daraus entstandenen Fehler der neuern und insonderheit der Wolfischen Lehrbücher gründlich rüget, nachgesehen zu werden.

g) S. Gedanken über die Lehrmethoden in der Philosophie von B* Berlin. 1773. Wie auch die vortreflichen Unterrichtsregeln des Hrn. Resewitz in der angeführten Schrift pag. 21 — 54.

h) S. Schmieds Rechenkunst in zweenen Theilen. Leipzig 1774.

i) S. L. Eulers vollständige Anleitung zur Algebra. 2. Th. 1770.

k) S. L'Histoire des Mathematiques par Mr. Montucla. a Paris 758. zween Bände in 4. Dieser vortrefliche Schriftsteller verspricht, die Geschichte für das jetztlaufende Jahrhundert in einem dritten Bande zu vollenden. — Der Verfasser der Anleitung zur mathematischen Bücherkenntniß, wovon bisher 6 Stücke erschienen, und derer Fortsetzung verspro-

sprochen wird, liefert einen weitläufigen nützlichen Auszug der angeführten Schrift — S. auch Wolfs Unterricht von den vornehmsten mathematischen Schriften im 4ten Theile seiner mathematischen Anfangsgründe, und Tom. V. Elementorum Matheseos vniversae.

Einleitung.

Von der Mathematik überhaupt.

§. 1. Schon der Namen Mathematik kann gewisser massen die Wichtigkeit dieser Wissenschaft zeigen. Diese Benennung ist keineswegs zufällig; vielmehr wurde sie von scharfsinnigen Männern erfunden. Das Wort Mathematik ist griechischen Ursprungs, und heißt lernen, erlernen. Plato, Pythagoras, Aristoteles, und andere große Männer des Alterthums hielten mit Recht dafür, daß die

mathematischen Wissenschaften das bequemste und vielleicht einzige Mittel seyen, die menschliche Seele von dem Gebrauche der Empfindungen auf eine sehr natürliche Art zu einer höhern Erkenntniß fortzuführen, und darin geübt zu machen. Deswegen verlangten sie, daß jeder diese Wissenschaften lernen sollte, der die Absicht hätte, die Seelenkräfte zu veredeln, und die Vernunft auf den Staffel zu erhöhen, auf welchem sie seyn muß, wenn sie in Untersuchung der Wahrheiten glücklichen Fortgang machen will. In den nachfolgenden Jahrhunderten hat man keinen Grund gefunden, von dieser Benennung abzuweichen, oder eine Aenderung darin zu treffen.

* Die Ueberschrift der platonischen Schule ist bekannt. Ueberhaupt halten die größten Männer sowohl unter den Alten, als Neuern dafür, daß die Mathematik die Grundlage zu den übrigen philosophischen Wissenschaften sey.

§. 2. Der *Nutzen der Mathematik* ist auch in der That ausgebreiteter, als man einem Anfänger gleich begreiflich machen kann. Es sind wenige menschliche Verrichtungen, von denen nicht ein Theil auf mathematischen Gründen beruhet; und sie erstreckt sich weiter, als auf blos sinnliche Dinge; z. B. auf alle Berechnungen des Wahrscheinlichen, und der Hoffnungen, wie bey Leibrenten, Lotterien u. s. w. Man beurtheilet nach ihren Regeln das Wachsthum eines

Staats an Bürgern, den nöthigen Vorrath der Lebensmittel, und andrer Bedürfnisse für ganze Länder u. d. gl. Ueberdas sind durch sie die Künste, welche uns die Bequemlichkeiten des Lebens verschaffen, erfunden, oder zur Vollkommenheit gebracht worden. Pflug, Wagen und Schiffe, alle Werkzeuge der Handwerker und Künstler sind Maschinen, von deren Einrichtung und Gebrauch die mathematische Kenntniß richtiger urtheilen lehrt. Endlich, wie Herr von Segner sagt: " Was in der Philosophie brauchbar, gründlich, erhaben ist, haben wir größtentheils der Mathematik zu danken. — Ja sie hat öfters den menschlichen Verstand zu einer Höhe erhoben, welche zu erreichen, er sich kaum versprechen konnte. „

* Die vorgesetzten Gränzen verstatten nicht, daß hier umständlich gezeigt werde, wie die Mathematik den sogenannten Facultätswissenschaften zu statten komme, und was für Vortheile selbige von ihr erhalten. Es ist aber auch so nöthig nicht. Ein Anfänger, der es noch nicht selbst erfahren, siehet doch aus einer bloßen Beschreibung den Nutzen nicht ein. Freylich giebt es Leute, die nichts für nützlich halten, als was sie gleich in Mund stecken können, und diesen ist mit einer bloßen Beschreibung noch weniger geholfen.

** Oft wendet ein Künstler oder Handwerker mathematische Kenntnisse an, ohne daß er doch mit

den Gründen der Mathematik bekannt ist. Es beweiset aber nicht, daß sie ihm unnütze sey. Denn man kann in der Ausübung gewisse Lehren benützen, ohne ihre Gründe zu wissen. Herr Hofrath Kästner giebt hiezu das Beyspiel: " Der Kaufmannsjunge lernt rechnen, ohne zu wissen, daß ungefähr vor zwey tausend Jahren ein griechisches Buch ist verfaßt worden, aus dem alle nachfolgende Zeiten die Lehren von den Verhältnissen und Proportionen, auf denen die Regel Detri beruhet, erlernet haben. Hätte man dieses Buch nicht gehabt, so wären diese Lehren vielleicht von einem andern scharfsinnigen Kopfe erfunden worden: aber von dem Kaufmannsjungen, dem sie doch unentbehrlich ist, gewiß nicht.„ Ein Künstler kann aber deßwegen in seinen Beschäftigungen mathematische Regeln anwenden, weil alle Menschen ein Vermögen besitzen, mathematische Wahrheiten zu erfinden. Neigung, Aufmerksamkeit, und andere Umstände führen sie dann zu solchen Erfindungen, ob sie gleich den Zusammenhang mit den allgemeinen Gründen nicht einsehen. Aber eben dieses verursacht, daß ein bloßer Empyriker oft in der Anwendung fehlt. Er weiß selten die Gränzen zu bestimmen, wie weit die Regel sich erstrecket. Aus diesem zeigt sich schon, daß eine blos natürliche Mathematik nicht hinlänglich sey.

§. 3. Alles, was eine Größe hat, das heißt, was sich vermehren, und vermindern läßt, das ist ein Gegenstand der Mathematik. Wo sich sonst

nichts

nichts verschiednes bemerken läßt, da giebt die Größe eine Verschiedenheit an. Z. B. eine Menge Geldes läßt sich von einer andern Menge, das von eben dem Schlage und Gewichte ist, dadurch unterscheiden, daß ein Haufen mehr als der andere enthält.

* Wir haben von der Größe eines Dings entweder eine unmittelbare Vorstellung; z. B. von der Größe eines Zolls: oder wir erhalten sie durch die Vergleichung mit einer andern bekannten Größe; z. B. man legt den Zoll, den man da als bekannt annimmt, an eine unbekannte Länge, und bemerkt, wie vielmal dieses geschehen könne. So auch, wer eine Meile gereiset ist, hat durch die Empfindung einen Begriff von der Länge des Weges, den man so nennt, erhalten. Wenn man also sagt, daß München von Wien sechzig Meilen entfernt sey, so stellt man sich diesen Weg sechzigmal vor. Man siehet also, um die Weite zweener Oerter voneinander zu bestimmen, die Weite als bekannt an, und fragt, wie vielmal sie in der andern Größe, die hier die Entfernung Münchens von Wien ist, enthalten sey. Dieses Verfahren wird Messen genannt. Messen heißt also eine unbekannte Größe durch eine bekannte bestimmen; und das Wort Maaß ist die Größe, die man als bekannt ansieht, und dadurch die andere ausdrücket.

** Das Wort, *Messen*, wird im gemeinen Leben verschiedentlich abgändert; z. B. in *wägen*, zählen, und dergleichen. Das unmittelbare Messen erfodert nicht allemal viele Geschicklichkeit, besonders wenn man keine große Genauigkeit verlangt. Aber eine unbekannte Größe auszumessen, z. B. die Höhe eines Thurmes, ohne daß man wirklich ein Maaß an sie legt, ist nicht so leicht. Man siehet, daß man erst, ehe man solches bewerkstelligen kann, aus den Eigenschaften und Begriffen der Größe durch verschiedene Mittel und Vergleichungen Schlüsse herleiten müsse; und dieses geschiehet in der Mathematik. Die *Mathematik* ist also eine Wissenschaft, welche aus bekannten Eigenschaften der Größen unbekannte durch Schlüsse herzuleiten lehrt.

§. 4. Die Größe läßt sich von allen andern Eigenschaften eines Dings abgesondert betrachten; z. B. die Länge einer Elle kann man gedenken, ohne daß man darauf siehet, ob diese Länge in wollen, in leinen, in anderm Tuch, oder in einem sonstigen Körper enthalten sey. Man stellt sich blos die Länge einer Elle vor. Oder man betrachtet zugleich die andern Eigenschaften der Sache, bey denen sich die Größe befindet. Z. B. man betrachtet die Entfernung zweener Oerter auf der Erde. Hieraus zeigt sich, daß die Mathematik überhaupt in die reine oder abgesonderte (Mathesis pura vel abstracta) und in die angewandte (applicata vel mixta) eingetheilt werden

een

den kann. Jene handelt also von der Größe überhaupt, oder als abgesondert betrachtet; diese von den Größen, wie sie sich in wirklichen Gegenständen befinden, oder sie wendet die Lehren der reinen Mathematik auf wirkliche Gegenstände an.

§. 5. Die Größe kann man entweder als eine Menge von Theilen überhaupt ansehen, oder man kann die Verbindung und Ordnung ihrer Theile zugleich betrachten. In jener Betrachtung gehört sie für die Arithmetik, in dieser für die Geometrie; z. B. eine eiserne Kugel von drey Pf. würde man betrachten können, als ein Ganzes, das aus drey Theilen zusammen gesetzt wäre, und wovon ein jeder Theil ein Pf. wäre. Wenn es also allein darauf ankäme, daß man ein Ganzes verfertigen wollte, das drey Pf. Eisen schwer wäre, so ist die Gestalt völlig gleichgültig. Genug wenn kein Eisen davon, und keines dazu kömmt. Man könnte demselben die Gestalt eines Würfels und vieler anderer Körper geben. Wenn aber auch auf die Gestalt gesehen wird, so siehet man leicht, daß eine Kugel etwas anders als ein Würfel sey.

* Es giebt keine anderen mathematischen Wissenschaften, als die arithmetischen, und die geometrischen; alle übrigen lassen sich unter diese bringen. Der Bequemlichkeit wegen hat man besondern Abtheilungen eigene Namen beygelegt. Zu der reinen Mathema-

thematik gehört noch die Trigonometrie, welche lehrt, wie man unbekannte Seiten oder Winkel durch Rechnung finden kann. Sie wird wieder nach Verschiedenheit der Dreyecke in die ebene und sphärische Trigonometrie abgetheilt. Ferner gehört zur reinen Mathematik die Algebra oder Analysis, welche unbekannte Größen aus bekannten Eigenschaften derselben durch Gleichungen (das ist, durch verschiedene Ausdrücke einerley Größe) zu finden lehrt. Die Algebra wird wieder in verschiedene Theile getheilt. Man begreift sie und ihre Anwendungen zusammen, unter dem Namen der *höhern Mathematik*. Die beiden Trigonometrien, und die Theile der Analysis sind eigentlich Wissenschaften, welche zusammen gesetzt sind, nämlich aus Arithmetik und Geometrie.

§. 6. Wenn man die Lehren der reinen Mathematik auf wirkliche Sachen anwendet, so wird man so viele Theile der *angewandten Mathematik* erfinden können, als verschiedene Gattungen von Dingen in der Welt sind, bey denen sich nämlich Größen durch Schlüße bestimmen lassen. Ihre Anzahl läßt sich also nicht angeben. So sind einige Anwendungen nur für gewisse Lebensarten brauchbar; z. B. aus der Anwendung der Arithmetik entstehet das Buchhalten. Von der Geometrie ist das Feldmessen eine Anwendung. u. s. w.

§. 7. Die gewöhnlichsten Gegenstände, worauf man bisher die Mathematik angewendet hat, sind 1.) die Kräfte der Körper, vermöge deren sie Bewegung erregen oder hindern: hieraus entstehen die mechanischen Wissenschaften; 2.) das Licht, daher entstehen die optischen, und 3.) die himmlischen Körper, daher haben die astronomischen Wissenschaften ihren Ursprung.

§. 8. Jeder dieser vorgenannten drey Hauptthei-le der angewandten Mathematik begreift wieder so viele unter sich, daß man ihn in neue Abtheilungen zergliedert. Entweder werden in den mechanischen Wissenschaften die Lehren vom Gleichgewichte fester Körper betrachtet; davon handelt die Statik, oder man betrachtet die wirkliche Bewegung fester Körper, und diese werden von der eigentlichen Mechanik gelehret. Das Gleichgewicht flüßiger, blos schwerer Körper wird in der Hydrostatik; ihre Bewegung in der Hydraulik, und die Beschaffenheit elastischer flüßiger Körper, dergleichen hauptsächlich die Luft ist, in der Aerometrie abgehandelt.

* Die Statik muß also von der Mechanik unterschieden werden. Alle genannten Wissenschaften pflegt man oft, wie schon gesagt, die mechanischen zu nennen, andere nennen sie die statischen.

§. 9. Man kann das Licht betrachten, wie es in gera-

geraden Linien fortgehet, und das geschiehet in der Optik: oder man kann es betrachten, wie es von Spiegeln und ebenen Flächen zurückgeworfen wird; und das geschiehet in der Katoptrik: oder endlich kann es betrachtet werden, wie es in durchsichtigen Materien z. B. Glaß, Wasser, Luft, gebrochen wird, und das ist der Gegenstand der Dioptrik.

§. 10. Die Astronomie handelt von den Gesetzen der Bewegung der himmlischen Körper. Die Eintheilung des Raums und der Zeit auf der Erde müssen vom Himmel erlernt werden, und setzen also astronomische Kenntnisse voraus. Die Eintheilung des Raums auf unserer Erde, wird in der mathematischen Geographie betrachtet; die Zeit, wenn von einzelnen Tagen die Rede ist, in der Gnonomik. Ins besondere lehrt die Gnonomik auf jede Fläche Sonnenuhren zu zeichnen. Jahre, Hunderte, und Tausende von Jahreu gehören in die Chronologie.

§. 11. In den mathematischen Lehrbüchern pflegen noch ausserdem die Geschützkunst oder Artillerie, die bürgerliche Baukunst, und die Fortification oder Kriegsbaukunst abgehandelt zu werden. Sie erfodern zwar noch andere Kenntnisse, die nicht mathematisch sind. Sie werden aber deswegen zur Mathematik gerechnet, weil mathematische Kenntnisse nöthig sind, wenn man sie gründlich verstehen will.

* Noch einige andere Theile gehören zur Mathe-

matik

matik, und verschiedene werden auch hier und da abgehandelt, z. B. die Musik, die Hydrodynamik, die zur Schiffahrt dienlichen Wissenschaften, und andere.

§. 12. Die mathematische Methode, oder die Art, wie Mathematiker ihre Sätze zu erklären pflegen, ist von langen Zeiten als die einzige gepriesen worden, welche zur Gewißheit führet, und vor Irrthümern sichert. Auch ist bekannt, daß die Lehrer der Arithmetik und Geometrie über alle Sätze vollkommen einig sind. Es liesse sich nun die Frage aufwerfen: ob es von den Gegenständen selbst herrühre, daß diese mathematische Lehren so gewiß seyen; oder ob allein die Methode diese Gewißheit verschaffe. Ueber das eine und das andere liesse sich vieles sagen, das aber hier am unrechten Orte stünde. Genug, wer einen Begriff von der mathematischen Methode hat, wer sich selbst in der Mathematik geübt hat, der siehet leicht, daß sie vortreflich ist, daß sie mit der vernünftigen, mit der philosophischen einerley ist, daß jeder, wer gründlich denken lernen will, ihre Vorschriften befolgen muß.

§. 13. Die Methode, deren sich die Mathematikverständige bedienen, ist aber diese. Sie fangen von Erklärungen an; oder sie zeigen deutlich und bestimmt, in was für einem Verstande sie die ihnen eigenen Wörter gebrauchen, und gehen nie von die-

ser

ser einmal festgesetzten Bedeutung ab. Diese Erklärungen enthalten weder mehr noch weniger Merkmale, als, die Sache, von der die Rede ist, von allen andern zu unterscheiden, hinlänglich sind. Zuweilen siehet man durch diese angegebenen Merkmale ein, wie die Sache entstehen kann, oder wie sie möglich ist, und dieses sind Sacherklärungen (Definitiones reales vel geneticæ), die andern sind Worterklärungen (Definitiones nominales). Man nimmt aber nicht eher an, daß die erklärten Sachen möglich sind, ohne es erwiesen zu haben. Euklides und andere, die ihm gefolgt sind, haben diese Maxime allezeit beobachtet, und es wäre zu wünschen, daß sie in andern Wissenschaften auch befolgt worden wäre. Denn man siehet leicht ein, was für falsche Schlüsse entstehen, wenn man ein Unding erkläret Wenn aber gezeigt wird, daß der Begriff kein Unding sey, so ist man eher vor dieser Gefahr gesichert. Z. B. Es könnte einer sagen: ein geradlinichtes Zweyeck ist eine Figur, die in zwo gerade Linien eingeschlossen ist. Nun würden aus dieser Erklärung Schlüsse gezogen werden können, aber lauter falsche; und dieses darum, weil es kein solches Ding giebt, noch geben kann, das eine Figur ist, und nur aus zwoen Linien bestehet. Wäre also gleich anfangs untersucht worden, ob der Begriff möglich sey, ob er nichts widersprechendes enthielte: so wären auch keine falschen Sätze daraus hergeleitet worden.

§. 14.

§. 14. Aus den Erklärungen werden Grundsätze (Axiomata) hergeleitet, welches solche Sätze sind, deren Wahrheit man einsiehet, sobald man sie verstehet. Wenn sie blos Sätze behaupten, deren Wahrheit so offenbar ist, daß sie keines Beweises bedürfen, so behalten sie diesen Namen im engen Verstande. Wenn sie aber fodern, daß eine Sache verrichtet werden könne, ohne die Art, wie es geschehen soll, zu zeigen, weil solche vielleicht von selbst offenbar ist, so werden sie *Heischesätze, Foderungen* (Postulata) genennet.

* Die Grundsätze folgen alsogleich auf die Erklärungen. Oft werden die Grundsätze von den Menschen gebraucht, ohne daß sie es selbst wissen, weil sie nur auf einzelne Gegenstände von ihnen angewandt werden; daher nennet man sie auch *gemeine Begriffe* (Notiones communes). Ihr allgemeiner Ausdruck macht oft, daß ein Anfänger die Wahrheit des Grundsatzes nicht gleich einsiehet, bis er ihm erklärt, oder durch Beyspiele deutlich gemacht worden ist. Die Heischesätze nehmen eine Sache als möglich an, ohne die Möglichkeit umständlich zu zeigen.

§. 15. Es giebt aber noch andere Sätze, deren Wahrheit man nicht sogleich einsiehet; und sie behaupten entweder blos, daß etwas so, oder nicht so sey, und dann sind es *Lehrsätze* (Theoremata). Der beygesetzte Beweis zeigt bey den Lehrsätzen die

Wahr-

Wahrheit der Behauptung. Die andern Sätze verlangen, daß etwas geschehen, oder bewerkstelliget werden soll, welches aber nicht gleich in die Augen fällt, wie es geschiehet, und dieses sind die **Aufgaben** (Problemata). Diesen wird die **Auflösung** (Solutio) beygefügt, welche die Art, wie die Aufgabe bewerkstelliget wird, darthut. Im Beweise wird darauf gezeigt, daß man das Verlangte erhalten müsse, wenn man so verfährt, wie die Auflösung vorschreibt.

§. 16. Noch besonders folgen nach den Lehrsätzen oft **Zusätze** (Corollaria), welche solche Sätze sind, die sogleich aus dem erwiesenen Satze fliessen; und derer Beweis also auch aus dem vorhergehenden Lehrsatz gleich in die Augen fällt. Ueberall, wo man will, werden **Anmerkungen** (Scholia) gesetzt, welche Erläuterungen, Anwendungen, das, was zur Geschichte des Satzes gehört, und verschiedenes enthalten, das sich in keinen der vorher genannten Sätze bringen läßt.

§. 17. Ausser der Geometrie pflegen auch in den arithmetischen Wissenschaften **willkührliche Sätze** (Hypotheses) vorzukommen. Denn in der Arithmetik hat man mit Zahlen zu thun, wovon die Zeichen und viele andere Einrichtungen nicht nothwendig sind. Wenn nun die Beschaffenheit dieser Zahlen erkläret wird, so geschiehet solches in willkührli-

chen Sätzen, weil sich eben diese Dinge durch andere Zeichen hätten andeuten lassen u. s. w.

* In der angewandten Mathematik pflegen noch Erfahrungen, Beobachtungen, Versuche, Hypothesen vorzukommen, von deren Einrichtung man wird belehret werden, wenn man diese Wissenschaft treibt.

§. 18. Das Wesentliche der mathematischen Methode bestehet darin, daß man aus sichern ganz ungezweifelten Gründen durch richtige Schlüsse das zeiget, was man zeigen will. Die Vordersätze der Schlüsse werden deswegen aus den vorausgeschickten Erklärungen, Grundsätzen, und andern schon bewiesenen Sätzen genommen.

* Die meisten Mathematiker pflegen über die Sätze die ihnen zugehörende Benennung zu schreiben. Jeder wird aber leicht einsehen, daß es nicht nothwendig sey. Wenn nur die Methode beobachtet wird, daß man nichts annimmt, dessen Wahrheit nicht von selbst offenbar, oder erwiesen ist; so wird einer, der auch wenig geübt ist, von selbst sehen, was eine Erklärung, ein Lehrsatz u. dergl. ist.

§. 19. Die mathematische Methode wird auch oft die euklidische oder geometrische genannt. Euklides nämlich hat besonders in den geometrischen Schriften uns eine vortrefliche Probe hinterlassen, wie man bey Erweisung der Wahrheiten verfahren müsse. Herr

Hofrath Kästner sagt hierbey: " Schwerlich wird man sie auch recht kennen, wenn man nicht diesen Schriftsteller und solche, die ihm getreu folgen, lieset. „ Die geometrische Lehrart wird ferner die synthetische genannt. Denn man kann bey dem Vortrage der schon erfundenen Wahrheiten anders verfahren, als bey der Erforschung solcher, die noch unbekannt sind. In dem ersten Falle ist es genug, jeden Satz überzeugend zu beweisen, welches dann geschiehet, wenn man aus den vorhergehenden allgemeinen Wahrheiten, dergleichen richtige Erklärungen, Grundsätze rc. sind, die Wahrheit besonderer Sätze darthut. Hier erhellet nun weiter nicht, wie die ersten Erfinder auf den Satz gekommen; und hierin bestehet die synthetische Lehrart, deren man sich in der Geometrie, sonderlich vor Alters bedienet hat, und deswegen sie auch die geometrische genannt wird. Wenn man noch unbekannte Wahrheiten untersucht, so muß man den Weg zeigen, auf welchem man zu den gesuchten gelangen kann. Man kommt also hier nach und nach von den unbekannten besondern Sätzen zu allgemeinen, die schon entweder bewiesen worden, oder Grundsätze sind; und hierin bestehet die *analytische* Methode, deren man sich sonderlich in der Algebra bedient, daher auch diese die Analysis heißt. Aus beyden Arten des Vortrages kann man eine vermischte zusammen setzen, welche sich bey dem Vortrage der Anfangsgründe mit Vortheil anwenden läßt.

Von*

* Von den bisher angeführten handeln ausführlicher Wolf in Elementis Matheseos universæ. Tom. I. wo gleich zu Anfang de methodo mathematica brevis commentatio. Kästner in den Anfangsgründen der Arithmetik und Geometrie, ebenfalls gleich anfangs in den Vorerinnerungen von der Mathematik überhaupt, und ihrer Lehrart. Die meisten Vernunftlehren handeln auch von der mathematischen Methode. Man sehe aber hauptsächlich Locke vom menschlichen Verstande, Hollmanns und Martin Knutzens Logik. Eine hieher gehörige Hauptschrift ist: Gedanken über die Lehrmethoden in der Philosophie von B*. Berlin 1773.

Anfangsgründe der Rechenkunst.

I. Abschnitt.

Allgemeiner Vortrag von den vier Hauptrechnungsarten in ganzen Zahlen.

§. 1. Erkl. Dinge von einerley Art sind solche, bey denen blos das betrachtet wird, was sie miteinander gemein haben. Z. B. Ein Engländer, ein Franzose, ein Deutscher haben das miteinander gemein, daß sie Europäer, oder in einer andern Betrachtung, daß sie Menschen sind.

§. 2. Erkl. Eine Menge Dinge von einerley Art heißt eine Zahl, und jedes einzelne Ding für sich allein betrachtet ist die Einheit.

§. 3. Zus. Also muß das, was zusammen gezählt werden, oder eine Zahl ausmachen soll, von einer=

einerley Art seyn. Z. B. Ein Deutscher, ein Franzose, ein Engländer können als solche betrachtet, nicht zusammen gezählt werden, denn sie sind keine drey Deutsche, drey Franzosen ꝛc. Aber als Europäer machen sie die Zahl drey aus. Die Einheit, worauf sie sich bezögen, wäre also ein Europäer.

§. 4. Zus. Es können Dinge in einer Betrachtung verschieden seyn, z. B. ein Franzose, ein Deutscher; in einer andern aber einerley, z. B. als Europäer betrachtet.

§. 5. Anm. Die Dinge von einerley Art werden oft mit einem griechischen Kunstworte Homogene, und die von verschiedener Art Heterogene genannt.

§. 6. Erkl. Eine Zahl wird vermehrt, oder vermindert, wenn solche Einheiten, aus denen sie bestehet, zu ihr gesetzt, oder von ihr weggenommen werden.

§. 7. Zus. Die Vermehrung kann auf zweyerley Art geschehen, entweder setzt man zu einer gegebenen Zahl die nämliche Zahl einigemal, oder man setzt andere hinzu. Daher entstehet im letzten Falle die Addition, und im ersten die Multiplication. Ebenfalls, wenn sie vermindert wird, so kann man eine Zahl entweder nur einmal wegnehmen,

oder so oft, als es möglich ist. Hieraus entstehet die Subtraction und die Division.

§. 8. Erkl. Addiren heißt eine Zahl erfinden, die verschiedenen andern, zusammen genommen, gleich ist. Die gefundene Zahl, welche so groß ist, als alle zusammen genommen, wird die Summe, und die gegebenen, welche man zusammen zählt, die summirenden genannt.

§. 9. Erkl. Multipliciren heißt eine Zahl etlichemal zu sich selbst addiren. Die Zahl, die auf solche Art heraus kömmt, heißt das Factum oder Product. Die eine Zahl, welche zu wiederholten malen zu sich selbst addirt wird, heißt der Multiplicandus, und die andre, welche anzeigt, wie oft die erste zu sich selbst addirt werden soll, der Multiplicator. Beyde aber zusammen werden Factores genannt. Wenn also z. B. vier durch drey multipliciret werden soll, so wird verlangt, daß man die Zahl vier dreymal zu sich selbst addiren soll, wodurch dann zwölf, als das Product, entstehet.

§. 10. Zus. Wenn also zwo Zahlen miteinander multiplicirt werden; so ist in dem Product, der eine Factor so vielmal enthalten, wie vielmal die Einheit in dem andern Factor enthalten ist. Im vorhergehenden Beyspiele, da vier durch drey multiplicirt wurde, hat man vier dreymal zu sich selbst

addirt,

addirt, und also so vielmal, als die Zahl drey, Einheiten hat; die Zahl zwölf, welche das Product war, ist also ein dreyfacher Vierer, oder das Product enthält die viere dreymal.

§. 11. Zus. Es ist gleich viel, welcher Factor zuerst gesetzt wird. Denn das Product von einerley Factoren wird auch bey veränderter Ordnung immer einerley seyn. Z. B. Wenn man die vorige Ordnung der Factoren (§. 10.) umkehren wollte, und drey durch vier multiplicirte; so würde ebenfalls das Product zwölf entstehen. Und dieses gilt auch, wenn mehrere Zahlen miteinander multiplicirt werden.

§. 12. Erkl. Subtrahiren heißt eine Zahl nach Gefallen von einer andern gegebenen wegnehmen. Die Zahl, welche übrig bleibt, wenn man die eine weggenommen hat, wird die Differenz, oder der Unterschied genannt.

§. 13. Zus. Der Unterschied und die weggenommene Zahl (Subtrahendus) machen daher die Zahl zusammen aus, von welcher die Wegnahme geschehen ist (Diminuendus).

§. 11. Erkl. Dividiren heißt von einer gegebenen Zahl eine andere so oft abziehen, als es möglich ist, so, daß nichts mehr übrig bleibt. Die Zahl, wovon der Abzug geschiehet, oder welche dividirt wird, heißt der Dividendus, die Zahl, welche abgezogen

wird, oder womit man dividirt, der Divisor; und die Zahl, welche anzeigt, wie oft der Divisor sich vom Dividendus habe abziehen lassen, der Quotient. Z. B. Wenn die Zahl zwölf durch drey dividirt wird, so kann man drey von zwölf viermal abziehen; vier wäre also der Quotient, zwölf der Dividendus, drey der Divisor.

§. 15. Zus. Da der Quotient anzeigt, wie vielmal der Divisor vom Dividendus abgezogen werden kann; so zeigt auch der Quotient an, wie vielmal der erstere im letzteren enthalten sey. Denn es ist offenbar, daß, wenn sich drey von zwölf viermal abziehen läßt, auch die Zahl drey in zwölf viermal enthalten seyn müsse, weil sich sonst der Abzug nicht bewerkstelligen ließ. Also steckt der Divisor im Dividendo so oft, als der Quotient Einheiten enthält.

§. 16. Zus. Da der Divisor in dem Dividendo so vielmal enthalten ist, als der Quotient Einheiten hat (§. 15.), so muß auch der Dividendus wieder heraus kommen, wenn man den Divisor so oft nimmt, als der Quotient Einheiten hat, das heißt, wenn man beyde in einander multiplicirt.

§. 17. Zus. Wenn der Quotient mit dem Divisor multiplicirt wird, so erhält man den Dividendum. Der Quotient muß also da so oft genommen werden, als der Divisor Einheiten hat; folglich ist

der

der Quotient nur der so vielte Theil vom Dividendus, als der Divisor durch seine Einheiten anzeigt; und daher sieht man, warum diese Operation eine Division oder Theilung genannt wird. Z. B. Zwölf durch drey dividirt giebt den Quotienten viere; setzt man viere so oft, als der Divisor anzeigt, folglich hier dreymal, so erhält man den Dividendum. Da der Quotient dreymal gesetzt werden muß, um den Dividendum hervor zu bringen; so muß der Quotient auch nur der dritte Theil vom Dividendo seyn, folglich muß der Dividendus durch den Divisor hier in drey gleiche Theile getheilt worden seyn.

§. 18. Erkl. Alle Veränderungen, die mit Zahlen können vorgenommen werden, beruhen auf den vier erklärten Arten (§. 7 u. folg.). Man nennet sie zusammen die vier Species der Rechenkunst.

§. 19. Erkl. Gleiche Dinge sind die, welche einerley Größe haben; ähnliche Dinge aber, bey welchen alles einerley ist, ausgenommen die Größe. Z. B. Es könnte jemand eine viereckichte Figur durch die Ecke in zwey Stücke zerschneiden, und die zwey Stücke wieder so an einander setzen, daß es eine dreyeckichte Figur gäbe. Diese dreyeckichte Figur, weil nichts davon und nichts dazu gekommen ist, würde noch so groß seyn, als die vorige viereckichte, und folglich ihr gleich seyn; ob sie schon nicht die nämliche Gestalt hat, wie die viereckichte. Wenn man

ein kleines Miniaturgemälde mit einem großen Bilde vergleicht, und man könnte gar keinen Unterschied wahrnehmen, ausgenommen, daß das eine kleiner, als das andere ist, so würde man sagen, das kleine ist dem großen ähnlich.

§. 20. Willkührl. Satz. Wenn man jeder Zahl, die sich gedenken läßt, ein besonderes Zeichen geben wollte, so würde es unmöglich fallen, die Zeichen zu behalten. Daher hat man nur für die neun ersten Zahlen besondere Zeichen ausfindig gemacht, durch derer Verbindung die übrigen Zahlen ausgedrückt werden. Die Zeichen selbst sind diese 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. Die Namen dieser Zahlen weis jeder in der Sprache, die er verstehet, und brauchen nicht angeführt zu werden. Man nimmt nun ferner das Gesetz an, daß man allemal bis zehen zählt, und, so oft man bis zehen zählt, eine neue zusammen gesetzte Zahl macht. Zehn einfache Einheiten werden daher ein Zehner, zehenmal zehen Hundert, zehenmal hundert Tausend, tausendmal tausend eine Million, millionmal Million eine Billion, millionmal Billion eine Trillion, millionmal Trillion eine Quadrillion und s. w. genannt. Die übrigen Zahlen werden von den einfachen benannt; z. B. siebenzehen, achtzehen ꝛc. Um nun aber auch mit den obigen neun Zeichen alle Zahlen ausdrücken zu können, so nimmt man das Gesetz hier an, daß ein Zahlzeichen oder eine Zifer allein, einzelne Einheiten be-

deuten soll, wenn aber diese Zifer um eine Stelle weiter von der rechten Hand gegen die linke gesetzt wird, so soll sie allemal zehenmal mehr bedeuten, als in der vorhergehenden. Nun ist also noch ein Merkmaal nöthig, woraus man abnehmen könne, daß die Zifer weiter gegen die linke gerückt sey. Man nimmt hierzu das Zeichen 0. Folglich wäre 2 so viel, als zwo Einheiten, 20 aber so viel, als zween Zehner oder zwanzig, 200 so viel als zween Zehner zehenmal genommen, ein Zehner zehnmal genommen, macht aber hundert; daher macht dieses zweyhundert u. s. w.

§. 21. Zus. Folgende Zahl 58072 wäre also so viel als zwo Einheiten, 7 Zehner, kein hundert, 8 tausend, 5 zehntausend; weil allemal eine Ziffer um eine Stelle näher gegen die Linke zehnmal mehr als in der vorhergehenden bedeutet (§. 20.).

§. 22. Anm. Die Zifern werden für eine Erfindung der Araber gehalten. Ein zulänglicher Beweis ist davon, daß sie mit der Art der morgenländischen Völker, von der Rechten gegen die Linke zu schreiben, so viel Uebereinstimmung zeigen. Sie sind eine von den nützlichsten Erfindungen; denn die größten Zahlen können mit diesen wenigen Zeichen ausgedrückt, und die schwersten Rechnungen dadurch zu Stande gebracht werden. Ueberhaupt geben diese wenigen Zeichen, und diese eingeführte Art zu zäh-

len so viele Vortheile, die man bey einer andern Einrichtung nicht finden wird. Gleichwohl verspricht der gelehrte Ungar Herr Kalmar zur Rechnung bequeme Zeichen anzugeben. Es stehet zu zweifeln, ob es die That bestättiget; obschon auf der andern Seite des tiefsinnigen Lamberts Zeugniß von Kalmars Arbeiten ein günstiges Vorurtheil erregt.

§. 23. Anm. Daß die meisten Völker bis 10 zählen, daran haben sie vermuthlich die zehen Finger gewöhnet, wodurch sie zuerst rechnen gelernt. Denn sonst lassen sich so viele Arten zu zählen erdenken, als Zahlen sind. Die berühmteste ist des Herrn von Leibnitz seine Dyadik oder Rechnung mit zwoen Zahlzeichen. Dieser grosse Geist erläuterte dadurch einige chinesische Karaktere, in welchen gebrochene und ganze Linien vorkamen. Die Einrichtung von der selben ist folgende: Mit 1 und 0 werden alle Zahlen aus dem Gesetz ausgedrückt, daß die 1, wenn sie um eine Stelle weiter gegen die Linie rückt, zweymal mehr als vorher bedeute.

1. ist also nach dieser Rechnung auch 1
2. wird geschrieben . . . 10
3. 11
4. 100
5. . . . . 101 u. s. w.

Leibnitz machte aus dieser Erfindung eine witzige Anwendung auf die Schöpfung aus nichts. Er ließ eine Gedächtnißmünze prägen, auf welcher etliche Rech-

nungs-

nungsproben der Dyadik standen, mit der Ueberschrift: Omnibus ex nihilo ducendis sufficit unum.

§. 24. Willkühr. Satz. Die Zeichen der Arithmetischen Operationen sind diese: a.) Wenn Zahlen addirt werden sollen, so setzt man + dazwischen, welches plus oder auch und gelesen wird. Z. B. 5 + 8. b.) Wenn Zahlen subtrahirt werden sollen, so setzt man — dazwischen; es wird minus oder weniger ausgesprochen. Z. B. 15 — 6. c.) Wenn Zahlen multiplicirt werden sollen, so setzt man einen Punct oder ein liegendes Kreutz dazwischen; z. B. 5 × 6, oder 5 . 6. d.) Wenn Zahlen dividirt werden sollen, so setzt man zween übereinander stehende Punkten dazwischen; z. B. 30 : 6. e.) Wenn angezeigt werden soll, daß zwo Größen gleich sind, so setzt man zween Querstriche dazwischen; z. B. 5 + 3 = 8. f.) Wenn sich eine Operation zugleich auf verschiedene Zahlen beziehet, so schließt man diese Zahlen in zwo Klammern ein. Z. B. (5 + 6) 3. Es bedeutet alsdann, daß 5 und 6 addirt, und die Summe durch 3 multiplicirt werden soll. g.) Wenn eine Zahl größer, als die andere ist, so wird solches durch ein Zeichen angedeutet, dessen Oeffnung sich nach der größten, die Spitze aber nach der kleinsten wendet: z. B. 8 > 5 oder 5 < 8. Es wird im ersten Falle gelesen: 8 ist größer als 5, im andern: 5 ist kleiner als 8.

§. 25. Grundsätze. I. Das Ganze ist seinen Theilen zusammen genommen gleich, und also größer als jeder einzelner Theil, oder einige Theile.

Z. B. $15 = 3 + 5 + 7$; $15 > 3$; $15 > 5$; $15 > 7$; $15 > 3 + 5$; $5 + 7 < 15$. u. s. w.

II. Jede Größe ist sich selbsten gleich.

$16 = 16$; $14 = 14$.

III. Wenn zwo Größen einer dritten gleich sind, so sind sie einander selbst gleich.

$$\begin{array}{c} 8 = 5 + 3 \\ 8 = 7 + 1 \\ \hline 5 + 3 = 7 + 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 3 \times 5 = 15 \\ 15 = 30 : 2 \\ \hline 3 \times 5 = 30 : 2 \end{array}$$

IV. Wenn zwo Größen einander gleich sind, und eine dritte größer oder kleiner ist, als eine von beyden gleichen Größen, so ist sie auch größer oder kleiner als die andere.

$$\begin{array}{c} 8 = 5 + 3 \\ 10 > 8 \\ \hline 10 > 5 + 3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 7 = 9 - 2 \\ 3 < 7 \\ \hline 3 < 9 - 2 \end{array}$$

V. Gleiches zu gleichen addirt, giebt gleiche Summen.

$$\begin{array}{c} 9 = 7 + 2 \\ 3 = 3 \\ \hline 9 + 3 = 7 + 2 + 3 \end{array}$$

VI.

VI. Gleiches von gleichem subtrahirt, giebt gleiche Differenzen.

$$\begin{array}{r} 12 = 8 + 4 \\ 2 = 2 \\ \hline 12 - 2 = 8 + 4 - 2. \end{array}$$

VII. Gleiches durch gleiches multiplicirt, giebt gleiche Producte.

$$\begin{array}{r} 5 = 3 + 2 \\ 6 = 6 \\ \hline 5 \times 6 = (3 + 2)\, 6 \end{array}$$

VIII. Gleiches durch gleiches dividirt, giebt gleiche Quotienten.

$$\begin{array}{r} 30 = 5 \times 6 \\ 5 = 5 \\ \hline 30 : 5 = 5 \times 6 : 5 \end{array}$$

IX. Es werden also Summen, Differenzen, Producte, Quotienten ungleich, wenn man ungleiches addirt, subtrahirt, damit multiplicirt, oder dividirt.

X. Wenn man zu einer Größe eine andre addirt, und die nämliche wieder subtrahirt, und so auch umgewendet, so bleibt die Größe unverändert.

XI. $8 + 4 - 4 = 8$ oder umgewendet $8 - 4 + 4 = 8$ Wenn man eine Größe durch eine andere multipli-

cirt,

cirt, und durch die nämliche dividirt, und so auch umgewendet, so bleibt die erste Größe unverändert.

$6 \times 2 : 2 = 6$ oder umgewendet $6 : 2 \times 2 = 6$

§. 26. Aufgabe. Eine Zahl aussprechen, die mit Zifern geschrieben ist.

Auflös. Man theile eine gegebene Reihe von Zifern, von der rechten Hand gegen die linke, in Klassen, deren jede sechs Zifern enthält, und mache über der ersten Klasse, um dem Gedächtniß zu Hülfe zu kommen, einen Strich oder Punkt, über der zwoten Klasse zween Striche u. s. f. Jede dieser Klassen theile man wieder in zwo andere von dreyen Zifern, und bemerke dieses allezeit nur durch einen einfachen Strich unterhalb der Zahl. Hierauf kann man jede Klasse von dreyen Zifern lesen, und zwar so, daß man an der, welche linker Hand stehet, anfängt, und da, wo der Strich unterhalb stehet, allemal tausend, wo einer oben stehet, Million, wo zween oben stehen, Billion, wo drey stehen, Trillion ꝛc. die übrigen Zifern aber nach §. 20 ausspreche.

Exempel. $\overset{''}{38}|567,\overset{'}{349}|870,378$

$\overset{'''}{92}|400,\overset{''}{002}|583|\overset{'}{780}|000,320$

Die erste würde also ausgesprochen werden: acht und dreyßig Billionen, fünf hundert sieben und sechzig tausend, drey hundert neun und vierzig Millionen, acht hundert siebenzig tausend, dreyhundert acht und sie-

ben-

benzig. Die andere Zahl würde gelesen werden: zwey und neunzig Trillionen, vier hundert tausend und zwo Billionen, fünf hundert drey und achtzig tausend sieben hundert achtzig Millionen, drey hundert und zwanzig.

Beweis. Man überlege nur, daß (§. 20.) eine Zifer um eine Stelle weiter gegen die linke zehnmal mehr als in der vorhergehenden Stelle bedeutet. Wann man also von der Stelle der Einheiten zu zählen anfängt, so findet man, daß in der vierten Stelle oder gleich nach dem Strich unterhalb der Zahl die Tausende zu stehen kommen, in der siebenten Stelle, oder wo der Strich oberhalb stehet, die Million; folglich wenn noch mehr Zifern über die Millionen weiter gegen die Linke stehen, so beziehen sich diese auf Millionen. Man kann also da lesen 49 Millionen, 349 Millionen u. s. w. bis zur Zifer, welche in der dreyzehenden Stelle gesetzt worden, wo man millionmal Million, oder Billionen bekömmt, u. s. w. Jede Zifer, nämlich, die um sechs Stellen mehr gegen die Linke zu, stehet als eine andere, gilt eine Million mehr, und eine Zifer, die sechs Stellen höher stehet, als eine andere, beziehet sich auf Einheiten, die ein millionmal mehr sind, als die Einheiten, die niedriger oder mehr gegen die Rechte stehen.

§. 27. Anm. Die deutsche Sprache hat vor

den

den meisten andern das Unschickliche, daß sie die kleinere Zahl vor der größern im Aussprechen setzt; z. B. sechs und dreyßig statt dreyßig sechs sagt. Man ist aber schon daran gewöhnt, und darf also nur einige Aufmerksamkeit anwenden, um nicht in Verwirrung zu gerathen. Doch findet man aber auch, sonderlich in Schuldenverschreibungen, Wechseln und dergleichen, wo die Zahlen mit Worten ausgeschrieben sind, daß die größere Zahl voraus geschrieben wird.

§. 28. Zus. Wenn man eine mit Worten vorgesagte große Zahl mit Zifern aufschreiben will, so muß man für eine jede Menge von Einheiten einer gewissen Ordnung die gehörige Zifer in die ihr zukommende Stelle setzen, daß aber nicht wohl eher geschehen kann, als bis die Zahl völlig, oder eine Klasse ganz hergesagt ist.

Exempel. Man soll drey Millionen, fünf tausend, und drey und vierzig aufschreiben. Das würde also so stehen: 3|005,043.

§. 29. Anm. Anfänger müssen im Aufschreiben einer vorgesagten Zahl sich wohl üben. Sie lernen dadurch die Beschaffenheit und Einrichtung der Zahlen besser einsehen, und es ist über das eine nöthige Beschäftigung, weil man sonst in andern Operationen immer fehlet. Man lernt es eher aus Uebung, als aus den weitläuftigsten Vorschriften und Beyspielen.

§. 30. Aufg. Verschiedene Zahlen zu addiren.

Auflös. I. Man schreibe die Zahlen, die man addiren will, so, daß diejenigen Ziffern, welche Einheiten von einerley Ordnung zählen, in einer Reihe gerade untereinander stehen.

II. Man fange von denjenigen Ziffern an, deren Einheiten die kleinsten sind, und schreibe die niedrigsten Ziffern jeder solcher Summe unter die Reihe, von welcher die Summe herrührt.

III. Diese einzelne Summen addire man wieder auf eben die Art, um die völlige Summe zu erhalten.

Exempel.

	6	7	3	8	9
		4	5	6	2
			3	1	5
				1	6
			1	5	
		1	1		
	1	1			
	6				
	7	2	2	6	6

Beweis. Es ist klar, daß alle Einheiten der gegebenen, in der untersten Reihe enthalten sind.

§. 31. Zus. Diese Art zu addiren würde bey einer großen Zahl beschwerlich seyn, und überhaupt doppelte Mühe verursachen. Daher verfährt man in

der Ausübung auf die Art, daß man die Zifern, die in die folgende höhere Reihe zu stehen kommen, gleich im Sinne hinzu addirt, daher würde das vorige Exempel gleich so können addirt werden.

67389
4562
315
72266

§. 32. Zus. Die Addition und alle vier Species in genannten Zahlen, das heißt, wo die Einheiten genannt sind, auf welche sich die Zahlen beziehen, erfodern keine neuen Regeln. Das muß man aber wissen, wie viel kleinere Einheiten auf jede nächst größere gehen; z. B. wenn verschiedene Geldsorten zu addiren sind, so muß man wissen, wie viel Pfenninge auf einen Groschen, wie viel Groschen auf einen Gulden gehen. Bey uns hat nun der Gulden 20 Groschen, der Groschen zwölf Pfenninge. So viel man also hier 12 Pfenninge in der Addition bekäme, so viel Groschen setzte man in die folgende Stelle. Dieß gilt auch bey Berechnung des Maaßes, Gewichts, u. s. w. worinn Anfänger sich üben sollen. Ueberhaupt so viel Theile ein Ganzes von der größern Art ausmachen, so vielmal muß dieses ganze zur folgenden höhern Reihe gesetzt werden.

Exempel.	15 fl.	17 Gr.	10 Pf.
	12	19	11
	5	7	9
	34	5	6

§. 33.

§. 33. Aufg. Zu sehen, ob die gefundene Summe so groß sey, wie die gegebenen Zahlen zusammen genommen; oder die Probe der Addition zu finden.

Aufl. Ob man recht gerechnet, siehet man freylich bey allen Rechnungsarten am leichtesten, wenn man das Exempel noch einmal überrechnet. Insbesondere kann bey der Addition so zu Werke gegangen werden.

I. Wenn man das erstemal von unten angefangen hat, zu addiren, so fänge man das zweytemal von oben an, damit man nicht beydemal einerley Zahlen in einerley Ordnung addirt. Auf diese Art entdeckt man einen eingeschlichenen Fehler leichter.

II. Andere probieren die Addition auf eine andere Weise. Sie streichen aus der Zahl, die addirt werden soll, und in der Summe so vielmal 9 aus, als sich thun läßt, und bemerken den Rest. Ist dieser in der Summe so groß, als in den zu addirenden Zahlen, so ist recht addirt. Im obigen Exempel wäre der Ueberrest in beyden 5, folglich richtig addirt. Der Grund davon ist dieser. Man addire verschiedene Zahlen, z. B. 12 und 8, so ist die Summe 20. Wenn man nun die Zehner dieser Summe schlechterdings als Einheiten betrachtet, so sind nur zwo Einheiten in der Summe; folglich sind zween Neuner weggeworfen; wirft man also in den

zu addirenden Zahlen auch die Neuner weg, so muß eben so viel übrig bleiben.

III. Noch auf eine andere Art kan man die Addition probieren. Die Rechenmeister pflegen sie gewöhnlich anzuführen; sie ist aber eben so beschwerlich, als wenn man das Exempel von neuem überrechnete. Es wird so verfahren. Nachdem man addirt hat, so unterstreicht man die oberste Reihe, und addirt die andere Zahlen ausser der obern Reihe. Diese letzte Summe ziehet man von der erst erhaltenen ab. Ist nun recht addirt worden, so muß der Unterschied beyder Summen so groß seyn, als die unterstrichene oberste Zahl. Diese Operation setzet also schon voraus, daß man subtrahiren kann; und wenn man dieses kann, so wird ein Anfänger den Grund davon selbst einsehen.

Exempel.

67389	
4562	
315	
72266	Die erste Summe aller Zahlen.
4877	Die andere Summe der andern Zahlen ohne die oberste Reihe.
67389	Der Unterschied beyder Summen, welcher der obersten Zahl gleich ist.

§. 34. Aufg. Wenn zwo Zahlen gegeben sind, die kleinere von der grössern abzuziehen.

Aufl.

Aufl. Man schreibt abermals die Zahlen so, daß die Zifern, welche Einheiten von einerley Ordnung ausdrücken, in eine Reihe zu stehen kommen. Hierauf subtrahirt man die Anzahl der Einheiten einer jeden Ordnung, die in der kleinern Zahl enthalten sind, von der Anzahl eben dieser Einheiten in der grössern Zahl, und schreibt den Ueberschuß unter die Reihe dieser Einheiten.

II. Wenn dieses nicht angehet, sondern in der grössern Zahl weniger Einheiten von einer gewissen Ordnung enthalten sind, als in der kleinern, so stellt man sich vor, die nächst höhere Zifer der Zahl, von welcher der Abzug geschehen soll, werde um eine Einheit vermindert, und diese Einheit zu der Zifer gebracht, von welcher man eine darunter stehende grössere abziehen sollte, so giebt diese geborgte Einheit der höhern Ordnung, in der nächst niedrigen 10. Da nun ferner die Zifer, welche subtrahirt werden soll, nie grösser als 9 seyn kann, so läßt sich auch allemal der Abzug verrichten. Bey der Zifer, wo man geborgt hat, kann man es durch ein Zeichen, etwa einen Punct, bemerken.

III. Wenn die nächst höhere oder einige der nächst höhern Stellen Nullen enthält, so borgt man bey der ersten höhern Zifer, wo es angehet; dadurch werden alle dazwischen liegende Nullen in 9 verwandelt.

Exempel.

Zu I.	68379	Zu II.	8345
	43225		5416
	25154		2929

Zu III.	70008
	42689
	27319

Bew. Für den ersten Fall ist der Beweis offenbar. Es sind nemlich alle Theile der kleinern Zahl von allen Theilen der grössern weggenommen worden: die erhaltene Zahl muß also der Ueberschuß der grössern oder die Differenz der beyden seyn.

Der zweyte Fall gründet sich darauf, daß sich eine Zahl aus ihren Theilen verschiedentlich zusammen setzen läßt, wenn man nur keine dazu, oder davon thut. Die obige Zahl 8345 wird also seyn = 8000 + 300 + 40 + 5 (§. 21). Wann also davon 5416 soll abgezogen werden, so ist die = 5000 + 400 + 10 + 6. Nun kann man 6 Einheiten von 5 Einheiten nicht abziehen; man nimmt also noch 10 dazu; daher erhält man 15, wovon sich 6 abziehen läßt, weil aber von den 40 schon 10 weggenommen und zu den 5 gesetzt sind, so bleiben nur 30 daselbst. Man hätte also das nämliche erhalten, wenn man gleich eine Einheit der

höhern Ordnung geborgt hätte. Dieses Verfahren findet in allen Fällen statt.

Endlich der dritte Fall beruhet darauf. Wenn man eine Einheit borgt; so muß dieses natürlicher Weise geschehen, wo es geschehen kann. Bey keiner o kann man aber nichts borgen; folglich muß man so weit gehen, bis man eine Zahl antrift, die groß genug ist. Die nächste o nach dieser Zahl würde also 10 werden; von diesen 10 nimmt man aber eine Einheit zur folgenden o, und von 10 bleibt alsdann nur 9. So gehet es fort bis zu der Zifer, für welche man geborgt hat.

§. 35. Zus. Die Subtraction in genannten Zahlen geschiehet auf eben die Art. Man muß aber hier ebenfalls, wie bey der Addition wissen, wie viel eine Zahl grösserer Art, eine von kleinerer Art enthalte. Z. B. wie viel ein Gulden Groschen ausmache, damit man von dieser grösseren borgen könne, wenn die abzuziehende Zahl grösser ist.

Exempel.

fl.	Gr.	Pf.
15	3	9
4	18	11
10	4	10

Hier können 11 Pf. von 9 Pf. nicht abgezogen werden; man borgt also einen Groschen, der 12 Pf. enthält, und setzt die 12 Pf. zu den 9 Pf. und ver-

verrichtet alsdenn die Subtraction, und auf diese Art gehet es weiter.

§. 36. Anm. Zum Beyspiel der Subtraction kann auch folgendes dienen. Es ist ein gewisser Mensch 1742 den 12 Jul. gebohren, und 1775 den 25 Sept. gestorben: man fragt, wie lange er gelebt. Die Zeit der Geburt muß von der Zeit wo er gestorben, abgezogen werden; nur muß der 25ste Sept. und 12 Jul. in Monaten und Tagen vorher ausgedrückt werden. Es würde also so zu stehen kommen.

Gestorben	1775	8 Monate	25 Tage
Gebohren	1742	6	12
Das Alter	33 Jahr	2 Monate	13 Tage

Aehnliche aufgeworfene Fragen lassen sich auf gleiche Art auflösen.

§. 37. Aufg. Die Probe der Subtraction zu verrichten.

Auflös. Man addire die Differenz und die subtrahirte Zahl zusammen, so muß die Zahl wieder heraus kommen, von welcher subtrahirt worden ist.

Exempel.

68543
53842
14701
68543

Bew. Wenn man von einem Ganzen was hinwegnimmt, und addirt das hinweggenommene zu

dem

dem verminderten Ganzen, so muß das vorige Ganze wieder heraus kommen.

§. 38. Aufg. Alle Producte zu finden, wenn man von den neun ersten Zahlen allemal zwo miteinander multiplicirt, oder das Einmaleins zu verfertigen.

Aufl. Man schreibe die neun ersten Zahlen in eine Reihe, und addire jede Zahl zu sich selbst; so erhält man jeder ihr doppeltes; das einfache einer jeden Zahl addire man zum doppelten, so hat man ihr dreyfaches u. s. w. welches man nur bis auf das neunfache fortzusetzen braucht. Da die Producte unter die Zahlen, von denen sie herrühren, und neben die Zahlen, welche das vielfache anzeigen, geschrieben werden, so erhält man eine Tafel, worin jedes Product zweymal stehet; jedesmal nämlich in dem Fache, das sich unter dem einen Factor und neben den andern befindet.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

§. 39. Zus. Wenn einer von den Factoren ein Zehner, Hunderter oder überhaupt von höherer Ordnung ist, so werden nur die Zifern miteinander multiplicirt, und an das Product so viele o gesetzt, als der eine Factor hat. Z. B. $8000 \times 6 = 6 \times 8 \times 1000 = 48000$. Eben so verfährt man, wenn beyde Factores von höherer Ordnung sind; z. B. $400 \times 60 = 4 \times 100 \times 6 \times 10 = 4 \times 6 \times 100 \times 10$ (§. 11.) Hieraus ist zu ersehen, daß zwo Zifern, deren jede, Nullen zur rechten Hand hat, miteinander multipliren so viel heißt, als die beyden Zifern als Einer multipliciren, und an das Product rechter Hand so viel o schreiben, als an beyden Zifern zusammenstunden. Ferner ist hieraus abzunehmen, daß das Rechentäfelchen (§. 38.), das man, insgemein das Pythagorische nennet, für alle Zahlen hinlänglich ist.

§. 40. Aufg. Eine Zahl durch eine andere zu multipliciren.

Aufl. Es sind hier drey Fälle möglich. Entweder bestehen beyde Factores aus einfachen Zifern, oder ein Factor bestehet aus einer einfachen, der andere aus zusammengesetzten Zahlen. I. Im ersten Falle dürfte der, welcher das Einmaleins noch nicht wüßte, das Product in den Täfelchen aufsuchen.

II. Im zweyten Falle multiplicirt man mit Hülfe des Einmaleins jede Zifer des einen Factors

durch

durch den andern, und schreibt die niedrigste Zifer eines jeden Products unter die Zifer, von der es herrühret; hernach addirt man alle einzelne Producte, In der Ausübung pflegt man aber diese Addition Kürze halber gleich in Gedanken zu verrichten.

Z. B.

5	8	4	7	
			6	
		4	2	
	2	4		
4	8			
3	0			
3	5	0	8	2

oder kürzer;

	5	8	4	7
				6
3	5	0	8	2

III. Haben beyde Factorn mehrere Zifern; so multiplicire man jede Zifer des Multiplicators mit jeder des Multiplicandi auf die Art, wie in II. gezeigt worden. Jedes einzelne Product schreibe man aber unter die Zifer des Multiplicators, von dem es herrühret, oder man rücke allemal um eine Stelle weiter gegen die Linke. Ist eine o im Multiplicator, so setzt man auch nur eine o im Producte, und das Product der nächst höhern Zifer kan man gleich in eben diese Zeile setzen, nämlich, daß es gleich nach o folgt.

Exem=

Exempel.

							5	8	3	0	6
							2	0	3	4	7
						4	0	8	1	4	2
					2	3	3	2	2	4	
				1	7	4	9	1	8		
		1	1	6	6	1	2	0			
		1	1	8	6	3	5	2	1	8	2

Bew. Der erste Fall ist ohnedas klar aus §. 38. Im zweyten Falle sind alle Theile des Multiplicandi so vielmal genommen worden, als der Multiplicator Einheiten hat; folglich beyde miteinander multiplicirt worden (§. 9.). Eben so erhellet der dritte Fall. Denn alle Theile des ersten sind so vielmal genommen worden, als der letzte Einheiten enthält. Es ist nämlich 58306 erst durch 7 multiplicirt worden; darauf durch 40; man hat zwar den Multiplicandum nur durch 4 multiplicirt; aber eben dadurch, daß man das Product um eine Stelle weiter gegen die Linke gerücket hat, ist es auch durch 40 multiplicirt worden. Die 0 wäre nämlich im Product unter die 2 des ersten Products zu stehen gekommen, und die 4 unter die Zahl, die vor 2 stehet. Kürze halber kann man also die 0 weglassen, und die erste Zahl um eine Stelle weiter gegen die Linke schreiben, so kömmt das nämliche heraus. Und so zeigt es sich auch für die übrigen Zahlen des Multiplicators.

§. 41.

§. 41. Zus. Aus der geschickten Art, die Zahlen mit Zifern zu bezeichnen, erwächst der grosse Vortheil, daß man während der Operation an den Werth der Zifer nicht zu denken braucht, weil sich solches durch ihre Stellen giebt; die Stelle aber wird durch Regeln angegeben, denen man blind folgen kann, auch wenn man die Operation nicht aus dem Grunde verstünde. Wenn also 35 durch 6 multiplicirt wird, so multiplicirt man wirklich 30 + 5 durch 6, ohne daß man während der Operation daran denkt, daß hier 30 + 5 multiplicirt wird. Folglich wenn der andere Factor auch zusammengesetzt ist z. B. 46; so ist 35 × 46 = 30 + 5 × 40 + 6. Hier wird also 30 + 5 erst durch 6, hernach beyde wieder durch 40 multiplicirt. Dieses war wegen des folgenden nöthig zu bemerken.

§. 42. Zus. Wenn in genannten Zahlen 1 Centner = 100 Pf. 1 Pf. = 32 Loth, und 5 Cent. 58 Pf. 19 Loth durch 6 multiplicirt werden soll; so nimmt man jedes sechsmal; und es ist weiter nichts nöthig, als daß man im Product, die Einheiten kleinerer Art zu denen von grösserer setzt, wenn es angehet.

Exempel.

5 Cent.	58 Pf.	19 Loth.
		6
30	348	114

Nun

Nun sind 114 Loth = 3 Pf. 18 Loth. Die Pf. setzt man zu den übrigen, und es sind 348 Pf. + 3 Pf. = 251 Pf. Aber 351 Pf. sind = 33 Centner 51 Pf. Folglich das Product 33 Cent. 51 Pf. 18 L. Durch die Division können leicht Einheiten kleinerer Art auf die von grösserer gebracht werden. Indessen kan man so verfahren. Da 32 Loth = 1 Pf. so zieht man 32 von 114 so oft ab, als es angehet; und, so oft es angehet, schreibt man eins zu den Pfunden. Auf ähnliche Art werden die Pf. auf Centner gebracht.

§. 43. Anmerkung. Die Probe der Multiplication ist die Division, die also vorher erst erklärt werden muß, ehe die Probe angestellt werden kann. Sowohl die Multiplication als auch die Division hat man auf verschiedene Art durch allerley Erfindungen zu erleichtern gesucht. Besonders sind die Stäbchen bekannt, die Johann Neper Baron von Marchiston, ein Schottländer angegeben; sie werden nach ihm die Neperianischen Stäbchen (Lamellæ Neperianæ) genannt; und ihre Haupteinrichtung beruhet auf den obigen Pythagorischen Täfelchen. Ludolph ehemals Professor zu Erfurt gab eine andere Art zu multipliciren an, wobey man das Einmaleins nicht nöthig hat, sondern durch die Addition das Product erhält. Das Verfahren bestehet aber darinn, daß man das Vielfache des Multiplicandi durch die Addition sucht, und hernach das Vielfache

so vielmal nimmt, als der Multiplicator anzeigt. Z. B. Wenn 7235 durch 6895 multiplicirt werden soll; so addire man erst den Multiplicandum zu sich selbst; so hat man sein Doppeltes oder Zweyfaches das Zweyfache addire man zum Einfachen, so erhält man das Dreyfache; das Dreyfache wieder zum Einfachen, so bekömmt man das Vierfache, u. s. w. wie aus beystehendem zu sehen ist.

I.	7235
II.	14470
III.	21705
IV.	28940
V.	36175
VI.	43410
VII.	50645
VIII.	57880
IX.	65115

Da nun 7235 durch 6895 zu multipliciren ist; so darf man nur aus vorstehenden Täfelchen erst das fünffache, hernach das neunzigfache, das achthunderttache, das sechstausendfache ausschreiben. Man bekömmt aber das neunzigfache, das achthundertfache ꝛc. wenn man nur das neunfache, das achtfache u. s. w. nimmt, und allemal eine 0 oder zwo 0 u. s. w. anhängt, oder es um eine Stelle weiter gegen die Linke rückt.

Exem=

Exempel.

7235	
6895	
36175	= 5fachen
65115	= 90fachen
57880	= 800fachen
43410	= 6000fachen
49885325	

Man siehet nun zwar hieraus, daß in allen Fällen nicht nöthig sey, das Vielfache bis aufs Neunfache zu berechnen; und wenn auch das Neunfache vorkömmt; so ist oft nicht nöthig, daß alle dazwischen fallende Vielfache gesucht werden; z. B. in obigem Beyspiele hätte man das 4 und 7 fache nicht gebraucht; und die andern hätten sich so befinden lassen: I + I = II; II + I = III; III + II = V; V + I = VI; VI + II = VIII; VIII + I = IX. Diese römischen Zahlen bedeuten das Vielfache, und zeigen, welche zusammen addirt werden müssen; z. E. das Einfache und Einfache geben das Zweyfache ꝛc. Aber im übrigen ist auch das leicht einzusehen, daß diese Operation viele Zeit erfodert, und wegen ihrer Weitläuftigkeit im gemeinen Leben ganz entbehrlich wird.

§. 44. Aufg. Es werden zwo Zahlen gegeben; es soll die Grössere durch die Kleinere dividirt werden. Aufl.

Aufl. Es sind hier zween Hauptfälle zu bemerken. Der erste ist, wenn der Divisor nur eine einzelne Zifer hat. Man sucht alsdann, wie vielmal der Divisor in jeder Zifer des Dividendus enthalten ist; da man bey der ersten Zifer des Dividendi anfängt, die linker Hand stehet, und durch alle Zahlen fortfährt. Es kann aber der Quotient gefunden werden, wenn man in dem Einmaleins eine Zahl sucht, die mit dem Divisor multiplicirt, der Zahl welche dividirt werden soll, gleich ist, oder doch zunächst gleich kömmt. So oft nun, als man eine Zahl des Dividendus durch den Divisor dividirt; so oft multiplicirt man die erhaltene Zahl des Quotienten in den Divisor, und ziehet das Product vom Dividendo ab.

Exempel.

Divisor	Dividendus	Quotient
6	8 3 7 9 6	1 3 9 6 6
	6	
	2 3 . . .	
	1 8 . . .	
	5 7 . .	
	5 4 . .	
	3 9 .	
	3 6 .	
	3 6	
	3 6	
	0 0	

Der andere Fall ist, wenn nämlich der Di-

visor aus mehrern Zifern bestehet. Hier untersucht man, wie vielmal die erste Zifer des Divisors in der ersten oder den zwo ersten Zifern des Dividendus, die rechter Hand stehen, enthalten ist. Wahrscheinlicher Weise ist der ganze Divisor in dem ganzen Dividendo eben so vielmal enthalten. Hierauf multiplicirt man den Quotienten in den ganzen Divisor, und ziehet das Product vom Dividendo ab. Läßt sich das Produet nicht subtrahiren, so ist es ein Zeichen, daß der Quotient zu groß sey, und muß also kleiner gemacht werden. Nachdem das Product vom Dividendo abgezogen worden; so nimmt man die darauf folgende Zifer des Dividendus dazu, und verfährt auf die vorige Art. Diese Operation wiederholet man, bis alle Zifern des Dividendus durch den Divisor dividirt sind.

Exempel.

```
Divisor   Dividendus   Quotient
  214    | 90522 |       423
         | 856   |
         -------
            492
            428
            -------
             642
             642
            -------
             000
```

Bew. In dem ersten Falle sucht man nach und nach, wie vielmal der Divisor in einer jeden Zahl des Dividendus, und folglich im ganzen Dividen-

dus enthalten sey, und dividirt also wirklich (§. 14.). Es muß derohalben nur noch gezeigt werden, ob solchergestalt der Quotient richtig erhalten wird. Es ist aber aus der Operation leicht zu zeigen. Wenn 83796 durch 6 dividirt wird, und zwar erstens die Zahl 8 durch 6; so ist offenbar, daß es eigentlich 80000 sey, und folglich der Quotient 10000, wie aus dieser Rechnung zu sehen.

6	83796	10000
	60000	3000
	23000	900
	18000	60
	5700	5
	5400	
	390	
	360	
	30	
	30	

Der Quotient wird derohalben richtig erhalten, wenn man die Zahlen gleich neben einander setzt. Denn 10000 + 3000 + 900 + 60 + 5 = 13965. Auf eben diese Art wird der zweyte Fall bewiesen.

§. 45. Zus. Wenn der Divisor in der höchsten Zifer des Dividendus nicht einmal enthalten ist; so nimmt man sie zu der nachfolgenden, und wenn er in dem Reste, und der dazu kommenden neuen Zifer nicht enthalten ist; so setzt man dafür eine 0 in den Quotienten, damit der Werth der Zifern ge-

hörig angezeigt werde, und nimmt zu dieser Zifer des Dividendus die nächstfolgende

Exempel.

```
7 | 6 3 1 4 | 9 0 2
  | 6 3
  --------
    0 1 4
      1 4
  --------
      0 0
```

Es geschieht oft, daß nach verrichteter Division etwas vom Dividendus übrig bleibt, welches keinen ganzen Divisor enthält. Man schreibt diesen Rest, um den vollständigen Quotienten zu bekommen, noch zu ihm, macht einen Strich darunter (welches ebenfalls das Divisionszeichen ist), und setzt unterhalb des Querstriches den Divisor. Der Grund davon läßt sich erst im folgenden Kapitel zeigen.

Exempel.

```
835 | 5 6 7 3 7 9 | 6 7 9 414/835
    | 5 0 1 0
    ----------
      6 6 3 2
      5 8 4 5
    ----------
        7 9 2 9
        7 5 1 5
    ----------
          4 1 4
```

§. 46. Anm. Diese erklärte Art zu dividiren, nennt man unter sich dividiren. Weil alle Producte hier ordentlich hingeschrieben, und also die gemach-

ten

ten Fehler im Multipliciren oder im Subtrahiren leicht vermieden, oder entdeckt werden können. Auch diesen Vortheil erhält man dadurch, daß, wenn einerley Zifer im Quotienten zu wiederholten malen vorkömmt; das Product schon gemacht ist, und nur wieder abgeschrieben werden darf. Dieses Verfahren hat also verschiedene Vorzüge vor dem Dividiren über sich, da man die Producte in Gedanken macht, und abziehet.

§. 47. Zus. Nach der ludolphischen Art zu dividiren, wird so verfahren. Man berechnet das Vielfache vom Divisor bis auf das Neunfache. Man vergleicht jedes Vielfache mit dem Dividendo, und bemerkt, welches sich abziehen läßt. Die Zahl, welche andeutet, das wievielte Vielfache es sey, setzt man in Quotienten; hierauf nimmt man die nächstfolgende Zifer des Dividendus zu dem Ueberrest, und setzt die Vergleichung auf eben die Art fort.

Exempel. Es soll 389699 durch 1827 dividirt werden.

I.	1827	3896991	2133
II.	3654	3654...	
III.	5481	2429..	
IV.	7308	1827..	
V.	9135	6029.	
VI.	10962	5481.	
VII.	12789	5481	
VIII.	14616	5481	
IX.	16443	0000	

Wie man vermittelst der neperianischen Stäbchen dividiren könne, davon handelt Wolf in Element. Arithm. lat. und das mathemat. Lexicon II. Th.

§. 48. Zus. Wenn man eine genannte Zahl dividiren soll, so dividire man jeden Theil, und was sich nicht dividiren läßt, oder was übrig bleibt, das setze man zu der Größe kleinerer Art, und dividire die Einheiten der kleinern Art.

Z. B. 15. fl. 7. Gr. 4. Pf. sollen durch 4 dividirt werden; so dividire man erst die 15. fl. durch 4, der Quotient wird 3, und es bleiben noch 3. fl. übrig, diese mache man zu Groschen, und setze sie zu den folgenden 7 Groschen; sie machen also zusammen 60 + 7 Gr. = 67 Gr. Diese werden durch 4 dividirt, so ist der Quotient = 16 gr. und es bleiben wieder 3 Gr. Die 3 Gr. werden wieder zu Pf. gemacht, und zu den folgenden 4 Pf. addirt. Also 36 Pf. + 4 Pf. = 40 Pf. und durch 4 dividirt ist der Quotient = 10 Pf. Der ganze Quotient ist also = 3 fl. 16 Gr. 10 Pf. Ist der Divisor auch eine genannte Zahl, und man fragt, z. E. wie vielmal ist 3 fl. 6 Gr. 5 Pf. in 16 fl. 12 Gr. 1 Pf. enthalten; so muß erst beydes, der Divisor und Dividendus auf Pf. gebracht werden. Nun ist 3 fl. 5 Gr. 5 Pf. = 797 Pf. und 16 fl. 12 Gr. 1. Pf. = 3985 Pf. also letzteres durch ersteres dividirt giebt den Quotienten = 5.

§. 49. Aufg. Die Probe der Multiplication zu verrichten (§. 43).

Aufl. Man dividire das Product durch den einen Factor; und wenn alsdann der andere Factor zum Quotienten erhalten wird; so ist richtig multiplicirt worden.

Exempel.

```
   524
    38
 -----
  4192
 1572
 -----
 19912
```

Nun dividire man das Product durch einen Factor

```
38 | 19912 | 524
   | 190   |
 ---------
      91
      76
     ---
     152
     152
     ---
     000
```

Bew. Das Product entstehet aus der Multiplication der Factoren. Wenn also die beyden Factoren 6 und 8, und das Product 48 ist, so ist $6 \times 8 = 48$, oder wenn man beyderseits mit 6 dividirt $\frac{6 \times 8}{6} = \frac{48}{6}$ (§. 25. VIII). Es ist aber $8 = \frac{48}{6}$ (§. 25. IX), oder der eine Factor ist dem Product gleich, wenn es durch den andern dividirt wird.

§. 50. Aufg. Die Division zu probieren.

Aufl. Man multiplicire den Divisor mit dem Quotienten; und ist das Product derselben dem gegebenen Dividendo gleich; so ist richtig dividirt worden. Wenn die Division nicht völlig aufgehoben, sondern noch ein Rest geblieben ist; so muß auch dieser alsdann zu dem Product addirt werden.

Exempel.

```
324 | 58372 | 180          324
    | 324.. |              180
  ---------             --------
      2597.               25920
      2592.               324
    --------            --------
         52               58320
                             52
                        --------
                          58372
```

Bew. Erhellet aus §. 14.

§. 51. Anm. Solchergestalt dienen sich Multiplication und Division wechselweise zur Probe. So wie die Addition durch die Subtraction, und letztere durch die erstere probirt wurde (§. 33. und 37.).

II. Abschnitt.

Von den vier Rechnungsarten in Brüchen.

§. 52. Erkl. Wenn ein Ganzes in etliche gleiche Theile getheilt wird, und deren einer oder einige genommen werden, so wird dieses Stück in Vergleichung mit dem Ganzen betrachtet, ein Bruch oder gebrochene Zahl (fractio, numerus fractus) genannt. Z. B. Wenn man einen Gulden als ein Ganzes betrachtet; so kann man ihn in jede mögliche Theile eintheilen; also auch in 20. Nimmt man aber einen von diesen Theilen, so hat man den zwanzigsten Theil eines Guldens, oder einen Groschen. Ein Groschen enthält also einen zwanzigsten Theil eines Guldens, zween Groschen enthalten zween zwanzigste Theile u. s. w. Sie sind also hier Brüche.

§. 53. Zus. Ein Bruch ist deswegen kleiner als ein Ganzes, und es gehören zu einem Bruch zwo Zahlen. Eine, die anzeigt, in wie viele Theile das Ganze ist getheilt worden, und die andere, wie viele dieser Theile genommen worden, oder auf den Bruch gehen. Das erste zeigt der Nenner (Denominator) an, und dieser giebt dem Bruch den Namen; das andere zeigt der Zähler (Numerator) an, und dieser zählet also die Menge der Theile, die den Bruch ausmachen. Im vorigen Beyspiele wäre in dem Bruch zwey zwanzigste Theile der Nenner = 20,

denn

denn er zeigt hier, in wie viel Theile das Ganze getheilt ist; und der Zähler wäre = 2, denn diese Zahl zeigt, wie viel Theile von dem Ganzen, das in 20 eingetheilt, genommen sind. Nach einem willkührlichen Gesetz schreibt man den Zähler oben, den Nenner unten; zwischen beyde aber zieht man einen Strich. Die vorigen zwey Zwanzigtheile würden also durch $\frac{2}{20}$ geschrieben werden.

§. 54. Zus. Man kann so viele Theile, oder auch mehr nehmen, als das Ganze einmal ausmacht. Alsdann begreift der Bruch das Ganze einmal oder etlichemal und noch ein Stück darüber. Z. E. $\frac{4}{4}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{9}{4}$. Hieraus ersieht man aber, daß in diesem Falle der Zähler entweder dem Nenner gleich, oder grösser als der Nenner wird.

§. 55. Erkl. Diejenigen Brüche, wo der Zähler dem Nenner gleich, oder wo der Zähler grösser, als der Nenner ist, heißen *uneigentliche, unächte,* oder *Bastardbrüche* (Fractiones spuriae). Z. B. $\frac{9}{7}$, $\frac{8}{2}$, $\frac{9}{4}$. Die andern Brüche, wo der Zähler kleiner als der Nenner ist, heissen alsdann *eigentliche* oder *ächte Brüche* (fractiones verae) $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{9}$.

§. 56. Zus. Jeder Bruch läßt sich, wenn man ihn nicht auf das Ganze beziehet, als eine ganze Zahl behandeln. Man muß alsdann einen Theil des Bruchs als die Einheit annehmen. Z. B. $\frac{4}{5}$ ist ein Bruch, wenn man das Ganze als die Einheit annimmt. Nimmt man aber einen Theil des Bruchs $\frac{1}{5}$ als die Einheit an; so wird $\frac{4}{5}$ dadurch vollkommen ausgemessen, und es wäre eben so viel, als wenn 4 durch 1 ausgemessen wird. So entstehet 4, wenn 1 viermal genommen wird; auf eben die Art entstehet $\frac{4}{5}$, wenn $\frac{1}{5}$ viermal genommen wird.

§. 57. Zus. Die Brüche können als Quotienten angesehen werden, welche entstehen, wenn der Nenner durch den Zähler dividirt wird z. B. $\frac{1}{3}$. Hier ist 1 der Dividendus, 3 der Divisor, und der ganze Bruch $\frac{1}{3}$ ist der Quotient. Wer folgendes überlegt; wird sich von dieser Behauptung leicht überzeugen. Eine grössere, als 3 kann zwar freylich in einer kleinern 1 nicht ganz stecken; man kann also auch eigentlich nicht fragen, *wie vielmal* die Grössere in der kleinern enthalten ist: aber das kann man fragen, was für ein Theil der Grössern in der kleinern steckt. In dem Bruch $\frac{1}{3}$. ist also 3 in 1 nicht ganz, sondern nur der dritte Theil enthalten, und eben dieses zeigt der Bruch $\frac{1}{3}$ als der Quotient an.

§. 58. Anm. Alle Lehren von den Brüchen lassen sich durch Linien den Anfängern sinnlich machen; und Lehrer thun wohl, wenn sie es ihnen auch auf diese Art zeigen. Der vorige Zusatz würde sich so erläutern lassen. Wenn eine Linie AB hier als ein Ganzes angenommen wird, so zeigt der Bruch $\frac{1}{3}$, daß das Ganze in 3 gleiche Theile getheilt, und einer von solchen Theilen genommen werden soll. Wenn also die Linie AB, in 3 gleiche Theile AC, CD, DB getheilt wird; so ist einer, als z. E. AC der Werth des Bruchs, nämlich ein Drittheil der ganzen Linie. Fragt man nun, was für ein Theil der ganzen Linie AB in dem Stück AC enthalten ist, so ist von AB nun ein eben so grosses Stück, als AC ist, darinn enthalten; AC ist aber $\frac{1}{3}$, folglich ist nur der dritte Theil von AB in AC enthalten; und vermöge des Sprachgebrauchs sagt man hier: AB ist in AC ein Drittheilmal enthalten.

§. 59. Zus. Hieraus zeigt sich, a) wie uneigentliche Brüche zu behandeln sind. In selbigen ist der Nenner kleiner, als der Zähler (§. 55); sie können also wirklich dividirt werden; z. B. $\frac{8}{2} = 4$; $\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$; $\frac{5}{5} = 1$. b.) Folglich ist $\frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{8}{8}$ u. s. w. denn alle sind $= 1$. c.) Sollen zwo

Zah=

Zahlen, eine durch die andere dividirt werden; so kann man sie als Brüche schreiben, den Dividendum als den Zähler, den Divisorem als den Nenner. Z. E. $\frac{8325}{72}$; und wenn wirklich dividirt wird, so kömmt heraus $115 + \frac{45}{72}$, das dann der wahre Quotient ist. Denn 72 in 8325 ist hier 115 mal und noch $\frac{45}{72}$ mal enthalten. d). Dividirt man also eine Zahl durch eine andere, und es bleibt noch etwas nach vollbrachter Division übrig; so muß man diesen Ueberrest, um den vollständigen Quotienten zu erhalten, noch zu dem Quotienten setzen, und den Divisorem unter ihn, in Form eines Bruches; z. B. $\frac{2805}{43} = 65 + \frac{10}{43}$.

§. 60. Lehrs. Ein Bruch kann auf zweyerley Art grösser gemacht werden. Entweder man läßt den Nenner unverändert, und vermehrt den Zähler; oder man läßt den Zähler unverändert, und vermindert den Nenner. Z. E. $\frac{3}{7}$ nimmt man $\frac{5}{7}$, so wird der Bruch grösser. Eben dieses geschieht, wenn $\frac{3}{4}$ genommen wird.

Bew. Denn man theilt im ersten Falle das Ganze in die nemliche Anzahl der Theile, und nimmt solcher Theile mehr als vorher: also bekömmt man ein grösser Stück vom Ganzen; und der Bruch wird dadurch grösser. Wenn im andern Falle der Nenner vermindert wird, so zeigt dieses an, daß das Ganze

in

in weniger Theile als zuvor eingetheilt worden; dadurch müssen also die Theile grösser werden. Da nun ferner der Zähler unverändert bleibt; so werden dieser grössern Theile eben so viel, als vorher von den kleinern genommen; folglich bekömmt man wieder ein grösser Stück vom Ganzen, und der Bruch wird grösser.

§. 61. Lehrs. Eben so wird ein Bruch auf zweyerley Art vermindert; entweder, daß man den Zähler vermindert, und den Nenner unverändert läßt, oder daß man den Zähler unverändert läßt, und den Nenner vermehrt. Z. E. Wenn aus $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$ gemacht werden sollen; so ist letzterer Bruch kleiner als der erstere. Im zweyten Falle ist $\frac{4}{5}$ grösser als $\frac{4}{7}$.

Bew. Wenn man den Zähler verändert, und den Nenner unverändert läßt; so theilt man das Ganze in die nämliche Anzahl Theile als vorher, man nimmt aber weniger von diesen Theilen. Folglich wird der Bruch kleiner. Zweytens wird der Nenner vermehrt; so wird das Ganze in mehr Theile als vorher eingetheilt, die Theile müssen also kleiner werden: da aber nicht mehr Theile von diesen kleinern, als vorher von den grössern genommen werden, weil der Zähler unverändert bleibt; so wird der Bruch kleiner.

§. 62. Lehrs. Wenn man Zähler und Nenner eines Bruchs durch einerley ganze Zahl multiplicirt; so wird der Werth des Bruchs nicht verändert. Z. E. $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20}$.

Bew. Mit Vermehrung des Zählers wächst der Bruch. (§. 60.) Und mit Vermehrung des Nenners wird er kleiner (§. 61). Da nun hier der Zähler und der Nenner gleichviel vermehrt werden; so wird der Bruch durch das erste eben so viel grösser, als er durch das letztere kleiner wird; und der Werth wird also nicht verändert,

§. 63. Zus. Es läßt sich also ein Bruch auf unzählich viele Arten ausdrücken; denn mit jeder möglichen Zahl kann man Zähler und Nenner multipliciren.

§. 64. Zus. Eine ganze Zahl läßt sich in einen uneigentlichen Bruch verwandeln; wenn man sie durch eine andere multiplicirt, und durch die nämliche dividirt. Es erhellet dieses schon aus §. 25. IX. Z. E. $5 = \frac{5 \times 3}{3} = \frac{5 \times 7}{7} = \frac{5 \times 11}{11}$ rc.

§. 65. Lehrs. Wenn Zähler und Nenner eines Bruches durch einerley ganze Zahl dividirt werden, so bleibt die Grösse des Bruches unverändert. Z. E. $\frac{15}{20} = \frac{15 : 5}{20 : 5} = \frac{3}{4}$.

Bew. Wenn durch die Division des Zählers

der

der Bruch verkleinert (§. 61.), durch die Division des Nenners aber vergrössert wird (§. 60.); und beydes durch einerley Zahl geschiehet, so wird er gleichviel vermehrt, und vermindert; und also die Grösse desselben nicht verändert.

§. 66. Aufg. Einen Bruch aufzuheben; das ist, einen Bruch durch kleinere Zahlen auszudrücken, ohne daß sein Werth geändert wird.

Aufl. Man dividire Zähler und Nenner durch einerley Zahl.

Exempel. $\frac{55}{105} = \frac{55:5}{105:5} = \frac{11}{21}$.

§. 67. Anm. Oft sind Zähler und Nenner so beschaffen, daß sie sich durch keine dritte Zahl, als allein durch 1 dividiren lassen, ohne daß beyde, oder einer wieder ein Bruch würden. Z. E. $\frac{15}{64}$, wenn beyde durch 2 dividirt würden; so erhielte man $\frac{7\frac{1}{2}}{32}$ In diesem Falle hätte der Bruch den Sinn, daß das Ganze in 32. Theile soll getheilt, und von dergleichen Theilen 7 und $\frac{1}{2}$ sollen genommen werden. Diese Zahlen, die sich durch keine andere, als die Einheit, ohne einen Bruch zu bekommen, dividiren lassen, werden numeri inter se primi genannt. Die Zahlen, wodurch sich Zähler und Nenner dividiren lassen, werden meistens durch leichte Proben gefunden. Doch kann man folgende prattische Regeln bemer-

merken. a.) Wenn die letzte Zifer des Zählers und Nenners sich durch 2 oder 5 oder 10 dividiren lassen, so läßt sich auch der ganze Zähler und ganze Nenner dadurch dividiren. Z. E. $\frac{5342}{6894} = \frac{2671}{3447}$; $\frac{875}{120} = \frac{151}{64}$; $\frac{870}{950} = \frac{87}{95}$. b) Wenn man jede Zifer im Zähler und Nenner als einzelne Zifern ansiehet, und solche besonders addirt, und man findet, daß die Summe lauter 9 enthielte; so läßt sich auch Zähler und Nenner durch 9 dividiren. Z. E. $\frac{5499}{8172}$, hier wären im Zähler drey Neuner, wenn man die einzelnen Zifer desselben zusammen zählte, und im Nenner zween Neuner, ohne daß etwas übrig bliebe. Also kann man beyde durch 9 kleiner machen. Es wird dabey der Bruch $= \frac{611}{908}$. Auch läßt sich ein Bruch kleiner machen, wenn man Zähler und Nenner in ihre Factorn auflöset, aus deren Multiplication sie entstanden sind, und die gemeinschaftlichen ausstreicht. Z. E. $\frac{45}{360} = \frac{5 \times 9}{4 \times 9 \times 2 \times 5} = \frac{1}{2 \times 4} = \frac{1}{8}$. Aber auch hier werden Anfänger Schwierigkeit finden, indem sie nicht gleich einsehen, welches die Factoren des gegebenen Products sind. Das mathematische Lexicon kann dabey einige Dienste leisten. Im zweyten Theile S. 530 und folgenden ist eine Tafel zur Aufhebung der Brüche, darinn alle diejenigen Zahlen enthalten sind, so sich durch ihre Factoren, daraus sie durch Multiplication entsprungen, wieder abbreviren lassen.

§. 68. Anm. Je grösser die Zahl ist, womit man Zähler und Nenner eines Bruchs dividirt; desto kleiner werden die Glieder des neuen Bruchs seyn. Nimmt man den größten Divisor, womit Zähler und Nenner zugleich dividirt werden können, so erhält man auch die kleinsten Glieder, womit eben dieser Bruch ausgedrückt werden kann. Man sucht immer einen gegebenen Bruch in den kleinsten Zahlen darzustellen, weil man sich seine Grösse alsdann besser vorstellen kann. Auch zeigt sich durch die vorher angeführten Methoden nicht allemal, ob der Bruch könne kleiner gemacht werden; z. B. $\frac{182}{2145}$ liesse sich durch keine Zahl, die nur eine Zifer hat, dividiren; und wenn man sie in Factoren zerlegen wollte, so findet man zwar 182 im Wolfischen Lexicon $= 2 \times 7 \times 13$; den Nenner findet man aber nicht. Dieses nun kann sich mit beyden zutragen, daß man nämlich nicht findet, aus welchen Factoren sie entstanden sind; oder man hat das Buch nicht. Alsdann kann man nach folgender Aufgabe das Verlangte finden.

§. 69. Aufg. Den größten gemeinschaftlichen Divisor zwoer Zahlen (communem mensuram maximam duorum numerorum) zu finden.

Aufl. Man dividire die grössere Zahl durch die kleinere, und bemerke den Rest. Man dividire den vorigen Divisor durch diesen Rest, und fahre auf

die-

diese Art beständig fort, daß man den Divisor durch den Rest dividirt, bis kein Rest mehr bleibt; so wird der letzte Divisor der größte gemeinschaftliche Divisor der gegebenan Zahlen seyn. Durch dieses Verfahren findet man allezeit den größten gemeinschaftlichen Divisor. Allein öfters ist der gefundene Divisor die Einheit; das zeigt dann an, daß beyde Zahlen keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, oder numeri primi inter se sind, und sich folglich nicht kleiner machen lassen.

Exempel. Es sey $\frac{182}{2145}$ gegeben; man sucht den größten gemeinschaftlichen Divisor des Zählers und Nenners, so ist:

I. 182 | 2145 | 11
        182
      ———
        325
        182
      ———
Rest 143

II. 143 | 182 | 1
        143
      ———
Rest 39

III. 39 | 143 | 3
        117
      ———
Rest 26

IV. 26 | 39 | 1
        26
      ———
Rest 13

V. 13 | 26 | 2
        26
      ———
        00

Weil kein Ueberrest mehr bleibt, wenn 13 der Divisor ist; so läßt sich auch durch eben diese Zahl

Zähler und Nenner des Bruchs aufheben. Wenn man es versucht; so wird $\frac{182}{2145} = \frac{14}{165}$.

§. 70. Aufg. Zween oder mehrere Brüche, welche verschiedene Nenner haben, unter eine Benennung zu bringen, so daß der Werth der Brüche nicht verändert wird.

Aufl. Wenn zween Brüche gegeben sind, und man multiplicirt Zähler und Nenner eines jeden in den Nenner des andern; so erhält man zween neue Brüche, die den vorigen gleich sind. Z. E. $\frac{8}{9}$; $\frac{5}{7} = \frac{8 \times 7}{9 \times 7}$; $\frac{5 \times 9}{7 \times 9} = \frac{56}{63}$; $\frac{45}{63}$. Sind mehrere Brüche gegeben; so multiplicire man Zähler und Nenner eines jeden durch das Product aus allen übrigen Nennern; Z.B. $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{4}{7} = \frac{2 \times 6 \times 7}{2 \times 6 \times 7}$; $\frac{5 \times 3 \times 7}{5 \times 3 \times 7}$; $\frac{4 \times 3 \times 6}{7 \times 3 \times 6}$.

Bew. Wird Zähler und Nenner eines Bruchs mit einerley Zahl multiplicirt; so ist der Bruch nicht verändert (§. 62.). Da nun beyde durch den Nenner des andern multiplicirt werden, so werden die Nenner einerley; denn 9 × 7 ist 7 × 9 (§. 11.). Bey mehreren Brüchen wird ebenfalls der Werth eines jeden Bruchs nicht verändert, denn beyde Zähler und Nenner werden durch einerley Zahlen multiplicirt. Und da man übrigens den Nenner eines jeden in das Product aller übrigen multiplicirt; so werden immer einerley Zahlen miteinander multiplicirt; wodurch dann gleiche Prodncte entstehen (§. cit.).

Hieraus erhellet, wie einerley Nenner bey allen heraus kömmt.

§. 71. Zus. Soll eine ganze Zahl mit einem Bruch zu einerley Benennung gebracht werden; so darf man nur die ganze Zahl durch den Nenner des gegebenen Bruchs multipliciren, und zugleich dividiren. Sie wird dadurch nicht verändert (§. 25. IX), und bekömmt den nämlichen Nenner des Bruchs.

Exempel. $8 \frac{5}{6} = \frac{6 \times 8}{6} . \frac{5}{6}$

§. 72. Aufg. Brüche zu addiren.

Aufl. Haben die gegebenen Brüche, die addirt werden sollen, schon einerley Nenner; so addire man nur ihre Zähler, und schreibe die gemeinen Nenner unter die Summe. Haben sie nicht einerley Nenner, so bringe man sie erst unter eine Benennung (§. 71.), und verfahre wie vorher.

Exempel. $\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{8}{8}$; $\frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{11} = \frac{264}{352} + \frac{220}{352} + \frac{224}{352} = \frac{708}{352} = 2 + \frac{4}{352} = 2 + \frac{1}{88}$ (§. 59.)

Bew. Es können nur gleichartige Grössen addirt werden (§. 3.). Haben also Brüche einerley Nenner, so ist von einerley Theilen des Ganzen die Rede; und die Brüche können folglich addirt werden. Die Summe wird man derohalben finden, wenn man die Zähler zusammen addirt, und den gemeinschaftlichen Nenner darunter setzt.

§. 73.

§. 73. Zus. Wenn eine ganze Zahl zu einem Bruch addirt werden soll, so müßte man die erste in einen unächten Bruch verwandeln, der den nämlichen Nenner hätte, wie der gegebene Bruch (§. 71) und alsdann nach §. 72 verfahren.

Exempel. $15 + \frac{3}{8} = \frac{120}{8} + \frac{3}{8} = \frac{123}{8}$ (§. 72.)

§. 74. Aufg. Brüche von einander zu subtrahiren.

Aufl. Sind die Nenner einerley, so subtrahire man die Zähler von einander, und setze unter den Unterschied der Zähler den gemeinschaftlichen Nenner. Sind die Nenner nicht einerley, so bringe man sie erst zu einerley Benennung.

Exempel. $\frac{5}{13} - \frac{2}{13} = \frac{3}{13}$; $\frac{7}{12} - \frac{5}{17} = \frac{119}{204} - \frac{60}{204}$ (§. 70.) $= \frac{59}{204}$.

Bew. Da auch nur gleichartige Grössen voneinander subtrahirt werden können, so lassen sich nur Brüche, die einerley Nenner haben, von einander abziehen. Da nun die Nenner zeigen, in wie viele Theile das Ganze getheilt sey, oder von was für Theilen des Ganzen die Rede sey, so ist nur nöthig, die Zähler zu subtrahiren, und den Nenner wieder unter die Differenz zu setzen.

§. 75. Zus. Soll von einer ganzen Zahl ein Bruch abgezogen werden; so bringe man sie wieder

einer Benennung mit dem Bruch nach §. 71, und subtrahire dann den Bruch nach §. 74. Z. B. $7 - \frac{13}{16} = \frac{112}{16} - \frac{13}{16} = \frac{99}{16} = 6 + \frac{3}{16}$ (§. 59.)

Man kann auch auf eine andere Weise verfahren. Mann nehme von der ganzen Zahl eine Einheit und verwandle selbige in einen Bruch, die gleichen Nenner mit dem gegebenen hat; alsdann subtrahire man, und setze zur Differenz die übrig gebliebene ganze Zahl hinzu.

Exempel. $7 - \frac{13}{16} = 6 + \frac{16}{16} - \frac{13}{16} = 6 + \frac{3}{16}$.

§. 76. Aufg. Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren.

Man multiplicire den Zähler des Bruchs mit der ganzen Zahl, und setze unter dieses Product den Nenner.

Exempel. $8 \times \frac{3}{5} = \frac{24}{5} = 4 + \frac{4}{5}$.

Bew. Wenn $\frac{3}{5}$ durch 8 multiplicirt werden soll; so muß $\frac{3}{5}$ so oft genommen werden, als der andere Factor Einheiten hat; folglich achtmal: dieses also $\frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5}$. Die Summe dieser Brüche würde aber gefunden werden, wenn man die Zähler zusammen addirte (§. 72.). Da aber die Zähler auch gleich sind, so darf man, um sie alle zu addiren, nur 3 achtmal oder 3×8 nehmen, und den Nenner darunter setzen, d. i. $= \frac{3 \times 8}{5}$, welches dann ein Product aus der Zahl in den Bruch ist.

Damit man auch hier einsehe, daß es einerley ist, ob man die ganze Zahl durch den Bruch, oder letzten durch die erstere multiplicire; so ist nur nöthig, zu überlegen, daß 8 durch $\frac{3}{5}$ multipliciren heißt, den einen Factor 8 so oft nehmen, als der andere Einheiten hat (§. 10.). Nun ist der andere Factor keine Einheit; folglich soll von 8 nur so viel genommen werden, als der Bruch anzeiget. Es soll also 8 in 5 gleiche Theile getheilt, und dreymal genommen werden (§. 53.). Theilt man 8 in 5 gleiche Theile, so muß 8 durch 5 dividirt werden, und $\frac{8}{5}$ ist der Quotient (§. 57.). Nähme man diesen Theil dreymal, so ist $\frac{8}{5}+\frac{8}{5}+\frac{8}{5}=\frac{3\times8}{5}$ völlig, wie vorher.

§. 77. Zus. Daher ist bekannt, daß das Product aus einer ganzen Zahl und einem Bruch allemal kleiner, als die ganze Zahl werden muß, denn wenn man eine ganze Zahl mit einem wahren Bruche multiplicirt; so dividirt man die Zahl durch den Nenner, und multiplicirt sie mit dem Zähler des Bruchs. In einem wahren Bruche ist aber der Nenner grösser als der Zähler. Man dividirt also die gegebene Zahl mit einer grössern, und multiplicirt sie mit einer kleinern. Folglich muß die herauskommende Zahl kleiner als zuvor werden.

§. 78. Aufg. Einen Bruch durch eine ganze Zahl dividiren.

Aufl.

Aufl. Man dividire den Zähler des Bruchs durch die ganze Zahl, und schreibe den Nenner unter den Quotienten. Da aber dieses nicht in allen, ja in den wenigsten Fällen angehet; so multiplicire man den Nenner des Bruchs durch die ganze Zahl, und lasse den Zähler unverändert; der herauskommende Bruch ist der Quotient.

Exempel. $\frac{8}{9} : 2 = \frac{8:2}{9} = \frac{4}{9}$; $\frac{8}{9} : 2 = \frac{8}{9 \times 2} = \frac{8}{18}$; oder wenn man Zähler und Nenner wieder durch 2 kleiner macht $= \frac{4}{9}$ wie zuvor.

Bew. Wenn $\frac{8}{9}$ durch 2 dividirt werden soll: so soll man von $\frac{8}{9}$ den zweyten Theil oder die Hälfte bekommen. Man wird aber die Hälfte des Bruchs erhalten; wenn man den Zähler zweymal kleiner macht; oder durch 2 dividirt. Dann $\frac{4}{9}+\frac{4}{9}$ ist wieder $= 2 \times \frac{4}{9}$ (§. 76.), und also $\frac{4}{9}$ die Hälfte von $\frac{8}{9}$. Man kann aber auch den Bruch zweymal kleiner machen, wenn man den Nenner zweymal grösser macht (§. 61.), und den Zähler unverändert läßt.

§. 79. Anm. Es mußte diese Aufgabe voraus gehen, ehe die folgende gezeigt werden konnte.

§. 80. Aufg. Brüche durch Brüche zu multipliciren.

Aufl. Man multiplicire Zähler in Zähler, und

Nenner in Nenner; der herauskommende Bruch wird das Product der gegebenen Brüche seyn.

Exempel. $\frac{5}{9} + \frac{3}{4} = \frac{15}{36}$.

Bew. Multipliciren heißt eine Zahl so oft nehmen, als die andere Zahl Einheiten hat (§. 10.). Der Bruch $\frac{5}{9}$ muß derohalben $\frac{3}{4}$ mal genommen, das ist in 4 gleiche Theile getheilt, und 3 solcher Theile genommen werden. Theilt man $\frac{5}{9}$ in vier Theile; so muß er durch 4 dividirt werden (§. 78.), folglich $\frac{5}{9} : 4 = \frac{5}{9 \times 4}$ (§. 78.) $= \frac{5}{36}$. Nimmt man diesen Bruch 3mal; so ist $\frac{5}{36} \times 3 = \frac{5 \times 3}{36} = \frac{15}{36}$.

§. 81. Zus. Auf gleiche Art, wie in §. 77 ist offenbar, daß die Multiplication zweener Brüche in einander ein Product hervor bringt, das kleiner ist, als ein Factor.

§. 82. Aufg. Einen Bruch durch einen andern zu dividiren, wenn beyde Brüche gleiche Nenner haben.

Aufl. Man dividire mit dem Zähler des Divisors den Zähler des Dividendus, die herauskommende ganze Zahl oder der Bruch wird der Quotient seyn.

Exempel. Es sey $\frac{8}{9}$ durch $\frac{2}{9}$ zu dividiren; man muß also den Zähler des Dividendus 8 durch den Zähler des Divisors 2 dividiren. Es ist aber $\frac{8}{2} = 4 =$ dem Quotienten. Wenn $\frac{7}{9}$ durch $\frac{8}{9}$ zu

di-

dividiren wäre, so müßte also 7 durch 8 dividirt werden; der ganze Bruch $\frac{7}{8}$ würde alsdann der Quotient seyn.

Bew. Man will wissen, wie vielmal der Divisor im Dividendo steckt. Da nun beyde Brüche einerley Nenner haben; so beziehen sich die Zähler derselben auf einerley Einheiten, oder die Nenner sind nur die Namen der Einheiten, worauf sich die Zähler beyder Brüche beziehen. Man braucht also nur zu suchen, wie vielmal der Zähler des Divisors in dem Zähler des Dividendus steckt.

Ein Beyspiel wird die Sache deutlich machen; wenn man fragt, wie vielmal ist die Linie AB, die $\frac{1}{4}$ vom Ganzen ist, in dem Stück CB, das $\frac{3}{4}$ ist, enthalten; so sieht man leicht, daß, da beyde Viertel sind, AB für 1 und AC für 3 angenommen, und untersucht werden kann, wie vielmal 1 in 3 enthalten sey.

§. 83. Aufg. Brüche in einander zu dividiren, die nicht einerley Nenner haben.

Aufl. Man kehre den Divisor um, und multiplicire ihn mit dem Dividendus.

Exempel. Es soll $\frac{3}{7}$ durch $\frac{5}{8}$ dividirt werden.

Der

Der umgewandte Bruch $\frac{5}{8}$ wird $\frac{8}{5}$, mit dem Dividendus alsdann multiplicirt, giebt $\frac{24}{35}$ zum Quotienten.

Bew. Wenn Brüche einerley Nenner haben; so weis man schon aus vorhergehender Aufgabe, wie mit der Division zu verfahren sey. Da nun die gegebenen nicht einerley Benennung haben; so bringe man sie dazu. Es wird also der Dividendus $\frac{3}{7}$ $\frac{3 \times 8}{7 \times 8}$, und der Divisor $\frac{5}{8} = \frac{5 \times 7}{8 \times 7}$. Nun kann man nach §. 82. die Division verrichten. Alsdann wird der Quotient $\frac{3 \times 8}{7 \times 8}$. Hieraus zeigt sich aber, daß man gleich Anfangs, ohne sie zu einem Nenner zu bringen, den Quotienten nach der gegebenen Vorschrift hätte erhalten können. Denn $\frac{3 \times 8}{7 \times 5}$ $= \frac{3}{7} \times \frac{8}{5}$.

§. 84. Aufg. Eine ganze Zahl durch einen Bruch zu dividiren.

Aufl. Man kehre den Bruch, als den Divisor um, und multiplicire ihn mit der ganzen Zahl.

Exempel. Es soll 6 durch $\frac{5}{7}$ dividirt werden; so ist $6 \times \frac{7}{5} = \frac{42}{5}$ = dem Quotienten.

Bew. Die ganze Zahl 6 läßt sich leicht in einen uneigentlichen Bruch verwandeln, wenn man die Einheit ihr zum Nenner giebt, z. E. $\frac{6}{1} = 6$. Alsdann

dann hat man zween Brüche $\frac{6}{1}$ und $\frac{5}{7}$. Nun kann man nach §. 83 verfahren.

Anm. Anfänger haben besonders in Acht zu nehmen, daß sie nicht den unrechten Bruch umwenden. Auch die zween Fälle sind wohl zu unterscheiden: I. wenn die ganze Zahl der Divisor, II. wenn die ganze Zahl der Dividend ist. Der erste Fall ist §. 78. vorgekommen.

§. 86. Aufg. Ganze Zahlen, woran Brüche hängen, zu dividiren.

Aufl. Man bringe jede ganze Zahl mit ihrem angehängten Bruch zu einer Benennung nach §. 71, und alsdann dividire man nach §. 83.

Exempel. $53\frac{2}{3}$ soll durch $27\frac{5}{8}$ dividirt werden. Es ist $53\frac{2}{3} = \frac{161}{3}$, und $27\frac{5}{8} = \frac{221}{8}$ (§. 83.) folglich ist $\frac{161}{3} \times \frac{8}{221} = \frac{1288}{663}$.

§. 87. Erkl. Es werden in der Mathematik mit grossem Nutzen die Decimalbrüche gebraucht, deren Beschaffenheit hier noch kürzlich erkläret werden muß. Ein Decimal, oder zehntheilichter Bruch ist ein Bruch, dessen Nenner 10 oder ein Product aus mehreren 10 ist. Z. E. $\frac{5}{10}$; $\frac{8}{100}$; $\frac{3}{1000}$; 2c. Man läßt insgemein den Nenner weg, und um sie von den ganzen Zahlen zu unterscheiden, gebraucht man ein Comma oder Beystrich (,), das nach den

ganzen Zahlen gesetzt wird. Die erste Stelle nach dem Comma bedeutet alsdann Zehntheile, die andere Hunderttheile, die dritte Tausendtheile, u. s. f. Die obigen Brüche würden also zusammen so geschrieben werden: 0, 583. Die 0 zeigt hier mit dem nachgesetzten (,) an, daß keine ganze Zahl vorhanden. Fehlen einige Decimalbrüche, so wird ihre Stelle ebenfalls durch 0 angezeigt. Z. E. 5,0043 würde heissen: 5 Ganze, kein Zehntheil, kein Hunderttheil, 4 Tausendtheile, 3 Zehntausendtheile.

§. 88. Lehrs. Man kan aneinander gesetzte Decimalbrüche wie ganze Zahlen lesen, nur muß der Nenner des letzten mit ausgesprochen werden. Z. E. Der vorige 0,583 konnte ausgesprochen werden durch 583 Tausendtheile.

Bew. Die Zahl 0,583 ist nichts anders als $\frac{5}{10} + \frac{8}{100} + \frac{3}{1000}$ (§. 87.) bringt man diese letztere unter eine Benennung; welches leicht geschehen kann, wenn man die Zähler und Nenner des ersten mit 100, des zweyten mit 10 multiplicirt, so erhält man $\frac{500}{1000} + \frac{80}{1000} + \frac{3}{1000}$ (§. 72.). Werden also diese Brüche addirt, so sind sie $= \frac{583}{1000}$.

§. 89. Zus. Die Addition und Subtraction geschiehet, wie in ganzen Zahlen, nur muß man auch hier acht geben, daß die Brüche, welche sich auf einerley Nenner beziehen, untereinander gesetzt, und dann entweder addirt oder subtrahirt werden.

Exem-

Exempel der Addition.

5,83025	53,000
82,403	0,5203
0,000498	4,02
88,233748	57,5403

Exempel der Subtraction.

5,8023	4,32
0,7224	2,11502
5,0799	2,20498

In dem letzten Exempel der Subtraction sollte 2,11502 von 4,32 abgezogen werden. Man kann in diesem Falle der Zahl, wovon der Abzug geschehen soll, so viel Nullen anhängen, bis daß sie so viel Decimalstellen hat, als die abzuziehende Zahl. Es wird alsdann 4,32000, und die Subtraction kan geschehen. Der Grund davon ist: die Zahl wird durch die angehängten 0 nicht vermehrt, sondern nur dadurch zu einerley Nenner mit der andern, welche subtrahirt wird, gebracht. Denn $4,32 = \frac{432}{100}$ (§. 87.), und $2,11502 = \frac{211502}{100000}$. Will man die erstere mit letzterer zu einem Nenner bringen, so braucht man die ersten Zähler und Nenner nur mit 1000 zu multipliciren, und $\frac{432}{100}$ wird alsdann $= \frac{432000}{100000} = 4,32000$, und die Subtraction kann vollbracht werden, weil sie jetzt beyde einerley Nenner haben.

§. 90.

§. 90. Zus. Die Multiplication geschiehet ebenfalls, wie in ganzen Zahlen. Nur ist zu merken: das Product bekömmt so viel Decimalstellen, die man von der Rechten zur Linken abzählt, als beyde Factoren zusammen haben.

Exempel.

$$\begin{array}{r} 5,38 \\ 42,35 \\ \hline 2690 \\ 1614 \\ 1076 \\ 2152 \\ \hline 227,8430 \end{array}$$

Da hier in beyden Factoren 4 Decimalstellen sind; so bekömmt das Product auch 4. Der Grund davon ist leicht einzusehen $5,38 \times 42,35 = \frac{538}{100} \times \frac{4235}{100}$ (§. 87.) $= \frac{2278430}{10000}$ (§. 80.) $= 227 \times \frac{8430}{10000} = 227,8430$ (§. 87.)

§. 91. Zus. Auch die Division befolgt einerley Regeln mit der gewöhnlichen Art zu dividiren. Um den Quotienten aber richtig zu bezeichnen; zieht man die Anzahl der Decimalstellen im Divisor von der im Dividendo ab, und giebt dem Quotienten so viel, als diese Differenz beträgt.

Exempel.

5,38	2,278430	4235
	2152	
	1264	
	1076	
	1883	
	1614	
	2690	
	2690	
	0	

Da hier der Divisor 2 Decimalstellen, und und der Dividendus 6 hat, so bekömmt der Quotient so viel, als der Unterschied zwischen beyden beträgt; folglich 4. Er ist also = 0,4235. Man zählet wie in der Bestimmung des Products von der Rechten zur Linken die Decimalstellen im Quotienten ab.

Daß der Quotient richtig bestimmet sey, erhellet daraus. Der Divisor multiplicirt mit dem Quotienten giebt den Dividendus (§. 50.). Wenn nun 5,38 mit 0,4235 multiplicirt wird, so wird 2278430, und dieses Product muß 6 Decimalstellen haben, weil beyde Factoren 6 haben (§. 90.). Folglich kömmt hier der Dividend richtig wieder heraus. Hätte man den Quotienten so bezeichnet 4,235, oder so 0,04235 oder noch auf

unendlich viele andere Arten; so würde kein einziger solcher Quotient, wenn er mit dem Divisor multiplicirt wird den Dividendus geben. Noch auf andere Arten kann man sich von der Wahrheit der Regel überzeugen. Z. E. Man dürfte nur den Divisor und Dividendus wie ordentliche Brüche mit ihren Nennern schreiben; alsdann nach §. 83. dividiren, und endlich den Bruch wieder kleiner machen (§. 69.). Es sey z. E. 18, 275 zu dividiren durch 4, 25. Der Quotient ist nach der Regel 4, 3; denn 18, 275 $= \frac{18275}{1000}$ und 4, 25 $= \frac{425}{100}$.

Soll nun der erste Bruch durch den zweyten dividirt werden, so muß man letztern umwenden, und multipliciren (§. 83.). Es gibt also $\frac{18275}{1000} \times \frac{100}{425}$ $= \frac{1825000}{425000}$ den Quotient. Es ist aber $\frac{1827500}{425000}$ $= \frac{18275}{4250}$; oder wenn man den Bruch durch 425 aufhebt, so ist er gleich $= \frac{43}{10}$. Dieses ist aber $=$ 4, 3. Sollte der Divisor mehr Decimalstellen als der Dividendus haben, so hängt man an den Dividendus so viel 0, als man will, und macht die Division. Es sey 1, 6 durch 0, 625 zu dividiren. Man hänge an den Dividendus 1, 6 einige 0, so wird er 1, 60000

Exem=

```
0,625 | 1,60000 | 2,56
      | 1250    |
      ---------
         3500
         3125
         ----
          3750
          3750
          --------
             0
```

Da jetzt durch die angehängte 0 der Dividendus fünf Decimalstellen bekommen hat, und der Divisor drey hat; so muß der Quotient zwo enthalten.

III. Abschnitt.

Von den Quadrat und Cubikzahlen.

§. 92. Erkl. Wenn man eine Zahl einigemal durch sich selbst multiplicirt; so heißt das Product, welches daraus entstehet, eine Dignität, Potestät oder Potenz. Man unterscheidet aber die Dignitäten von einander durch die Anzahl der Factoren, die ineinander multiplicirt sind. Z. E. $= 5 \times 5 = 25 =$ der zwoten Dignität; weil hier zween gleiche Factores in einander multiplicirt sind. $5 \times 5 \times 5 = 125$ würde also die dritte Dignität seyn; $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ die vierte Dignität u. s. w. Damit man nicht nöthig hat, wenn von einer sol-

chen Dignität die Rede ist, z. E. von der hundertsten, den Factor hundertmal nebeneinander zu setzen; so gebraucht man eine Zahl, die rechter Hand an die Zahl gesetzt wird, und diese zeigt an, wie vielmal der Factor durch sich selbst multiplicirt werden soll. Die Zahl, die dieses anzeigt, wird der Exponent genannt. Z. B. 6^4 würde heissen, daß man 6 viermal durch sich selbst multipliciren sollte, oder es würde bedeuten $6 \times 6 \times 6 \times 6$. Es wird also hierdurch nicht verstanden, daß man 6 durch 4 multipliciren soll. Die Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt wird, heißt die Wurzel der Dignität. Im vorigen Exempel würde 6 die Wurzel der Dignität seyn.

§. 93. Erkl. Die zwote Dignität heißt auch noch mit einem besondern Namen eine Quadratzahl; und die dritte ein Würfel oder Cubikzahl. Eine Quadratzahl ist also ein Product aus zween gleichen Factoren, deren ein Factor die Quadratwurzel heißt; z. B. $4 \times 4 = 4^2 = 16$; und 4 ist die Quadratwurzel. Der Würfel oder die Cubikzahl entstehet daher, wenn man das Quadrat durch seine Wurzel multiplicirt; denn er ist ein Product aus drey gleichen Factoren, z. E. $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 16 \times 4 = 64$. Der Factor, der dreymal mit sich selbst multiplicirt wird, heißt die Cubikwurzel. Das Zeichen der Wurzel ist $\sqrt{}$, und man

schreibt

schreibt den Exponenten der Dignität, wovon die Rede ist, in die Oeffnung des Wurzelzeichens; bey dem Quadrat aber, da er 2 seyn sollte, läßt man ihn des häufigen Gebrauchs halber weg, weil, wenn man alle Sachen bezeichnet, und eine unbezeichnet läßt, eben dadurch diese Sache bezeichnet ist. $\sqrt{16} = 4$ würde heissen, die Quadratwurzel aus 16 ist gleich 4: und $\sqrt[3]{625} = 5$ würde bedeuten die Cubikwurzel aus 625 ist gleich 5.

§. 94. **Erkl.** **Die Quadratwurzel aus einer Zahl ziehen**, heißt eine Zahl suchen, die mit sich selbst multiplicirt die gegebene Zahl hervorbringt. Eben so heißt die **Cubikwurzel ausziehen**, eine Zahl suchen, die dreymal mit sich selbst multiplicirt die gegebene Zahl wieder hervor bringt.

§. 95. Zus. Von einer jeden gegebenen Zahl kann man leicht ihr Quadrat, ihren Cubus, oder eine höhere Poteſtät machen; allein umgekehrt aus dem Quadrat, aus dem Cubus, aus jeder Potenz die Wurzel zu schaffen, ist schwerer. In Anfangsgründen läßt sich nur zeigen, wie man aus dem Quadrat und dem Cubus die Wurzel ziehen soll.

§. 96. Erkl. Man pflegt die Wurzeln nach der Anzahl der Zifern, die sie hat, von einander zu unterscheiden. Eine **eintheilichte**, oder **monomische Wurzel** ist die, welche nur aus einer Zifer be-

stehet. Z. B. 5. Eine zweytheilichte oder binomische ist die, welche zwo Zifern hat, z. E. 26. Alle andere Wurzeln, die mehr als zwo Zifern haben, pflegt man überhaupt vieltheilichte oder polynomische zu nennen, z. B. 524.

§. 97. **Erkl.** Die Wurzeln werden ferner in rationale, und irrationale (numeri irrationales, surdi, incommensurabiles) eingetheilet. Eine rationale Wurzel ist diejenige, welche sich durch ganze Einheiten, oder Theile derselben vollkommen ausdrücken läßt. Z. E. aus 25 ist die Wurzel 5. Irrationale Wurzeln sind die, welche sich weder durch ganze Einheiten, noch durch Theile derselben vollkommen ausdrücken lassen. Z. E. die Wurzel aus 17 würde grösser seyn als 4, aber kleiner als 5. Denn $4 \times 4 = 16$ und $5 \times 5 = 25$. Nun mag man einen Bruch annehmen, welchen man will, der zu 4 gesetzt werden müßte, und der die Wurzel von 17 seyn sollte; so wird man nie einen finden, welcher die verlangte Eigenschaft hätte, wie aus dem folgenden noch mehr erhellen wird. Ein ähnliches Beyspiel läßt sich auf die Cubikzahlen anwenden.

§. 98. Zus. Wenn man die ersten 9 Zifern mit sich selbst multiplicirt; so bekömmt man ihre Quadrate, und wenn man die Quadrate ferner durch die Wurzel multiplicirt; so bekömmt man ihre Cubikzahlen (§. 93.) Es entstehet daraus folgendes

Täfelchen. In der ersten Querreihe stehen die Zahlen, welche mit sich selbst multiplicirt werden, in der zwoten ihre Quadrate, in der dritten die Cubikzahlen.

Zahlen.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubi.	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Verlangt man aus einer Zahl, die ein vollkommenes Quadrat ist, und welches nur aus einer oder zwoen Zifern bestehet, die Wurzel; so darf man nur in dem Täfelchen das Quadrat aufsuchen, die darüber stehende Zahl würde die Wurzel seyn. Z. E. man wollte aus 49 die Wurzel wissen, so findet man 7 darüber.

§. 99. Zus. Wenn die Wurzel um eine Zifer zunimmt, so nimmt das Quadrat um zwo Zifern zu, wie aus diesem Täfelchen erhellet.

Wurzeln	Quadrate
1	1
10	100
100	10000
1000 u. s. w.	1000000

Aus dieser Betrachtung kann man den Schluß ziehen: so vielmal in einer Quadratzahl zwo Zifern (die man zusammen eine Klasse nennet) von der Rech-

Rechten gegen die Linke gezählt werden können, so viel Zifern bekömmt die Wurzel. Die äusserste Klasse zur Linken kann aber auch Eine Zifer haben; und giebt auch eine Zifer für die Wurzel. Z. E. 1|00|00 giebt 3 Klassen. Die Wurzel muß also aus dreyen Zifern bestehen.

§. 100. Lehrs. Das Quadrat einer zweytheilichten Wurzel, z. E. der Wurzel $35 = 30 + 5$, bestehet aus dem Quadrat des ersten Theils dieser Wurzel, also aus $30^2 = 900$; ferner aus dem doppelten Product des ersten Theils der Wurzel in den andern, also $2 \times 30 \times 5 = 300$. Endlich aus dem Quadrat des zweyten Theils der Wurzel, also aus $5^2 = 25$.

Bew. Da $35 = 30 + 5$ und eine Quadratzahl erhalten wird, wenn die Zahl mit sich selbst multiplicirt wird, so darf dieses nur geschehen, so wird die Wahrheit des Lehrsatzes sich zeigen.

$$\begin{array}{rrrr}
 & 30 & + & 5 \\
 & 30 & + & 5 \\
\hline
30 \times & 30 & + & 30 \times 5 \\
 & & + & 30 \times 5 + 5 \times 5 \\
\hline
30 \times & 30 & + & 2 \times 30 \times 5 + 5 \times 5
\end{array}$$

Werden diese drey Stücke zusammen addirt, so kömmt die Quadratzahl der Wurzel 35 heraus. Dann

$$30 \times 30 = 900$$
$$2 \times 30 \times 5 = 300$$
$$5 \times 5 = 25$$
$$\overline{1225}$$

Wenn man 35 mit 35 multiplicirt, so erhält man eben dieses Product,

$$\begin{array}{r} 35 \\ 35 \\ \hline 175 \\ 105 \\ \hline 1225 \end{array}$$

das mit dem vorigen übereinstimmt.

§. 101. Zus. Wenn also eine Zahl das Quadrat von einer zweytheilichten Wurzel seyn soll; so müssen sich die im §. 100 genannten Stücke abziehen lassen.

§. 102. Aufg. Aus einer vollkommenen Quadratzahl, deren Wurzel aus zwoen Zifern bestehet, diese Wurzel zu finden.

Aufl. I. Man theile die Zahl von der Rechten zur Linken in Classen, so daß jede aus zwoen Zifern bestehe, die letzte linker Hand kann aber auch Eine Zifer haben. II. Man suche in dem Täfelchen (§. 98.), was für einer Zifer ihr Quadrat so groß oder doch zunächst kleiner ist, als die linke Klasse. Die Wurzel dieses Quadrats schreibe man auf, und ziehe dieses Quadrat selbst von der Klasse ab. III. Man nehme zu diesem Ueberreste die nächste Klasse hinzu,

 ver-

verdoppele die vorher gefundene Wurzel, und dividire damit den vorher genannten Ueberreſt und die neue Klaſſe. Zu dieſer Abſicht muß man die niedrigſte Zifer der doppelten Wurzel unter die hōchſte Zifer der neuen Klaſſe allemal ſetzen. IV. Man multiplicire alsdann den Quotienten oder dieſen zweyten Theil der Wurzel in den Diviſor, und ziehe das Product von der gegebenen Zahl ab. V. Man mache das Quadrat des Quotienten, und ziehe ſelbiges ebenfalls ab.

Exempel.	1 1	5 6	Wurzel.
	* 9	.	3 4
	2	5 6	
	**	6	
	2	4	
		1 6	
	***	1 6	
		0	

* Nāchſtes Quadrat. ** Doppelte Wurzel. *** Quadrat des neuen Theils der Wurzel.

Bew. Das Quadrat einer zweytheiligten Wurzel beſtehet aus dem Quadrate des erſten Theils der Wurzel, dem doppelten Product des erſten Theils in den zweyten, und dem Quadrat des zweyten Theils. Ziehet man alſo das Quadrat des erſten Theils ab, ſo hat man den erſten Theil der Wurzel.

Z. B.

z. B. 9 war oben das Quadrat, welches 11 am nächsten kömmt; 3 ist die Wurzel. In dem Ueberreste und der nächsten Klasse 256 mußten also noch das doppelte Product und das Quadrat des zweyten Theils enthalten seyn. Man kann aber den zweyten Theil der Wurzel finden, wenn man den ersten Theil der Wurzel verdoppelt, und damit dividirt. Denn, wenn man ein Product mit dem einen Factor dividirt, so wird der andere Factor der Quotient. Da nun 256, wie schon bekannt $= 3 \times 3 \times 4$, und noch überdieß $= 4 \times 4 = 4^2$; so würde man den andern Factor 4 finden, wenn man 256 durch $2 \times 3 = 6 =$ dem doppelten ersten Theile der Wurzel dividirt. Es ist auch in der That $\frac{256}{6} = 4$. Die letzte Zahl 6 wird nicht dividirt, weil sie nicht zum doppelten Producte, sondern zum Quadrate des letzten Theils gehört. Da nun dieser zweyte gefundene Theil in den doppelten ersten multiplicirt, und dieses Product, ingleichen das Quadrat des letzten Theils abgezogen wird; so sind alle Theile eines Quadrats einer zweytheilichten Wurzel in der gegebenen Zahl enthalten. Folglich ist die gefundene Zahl die richtige Wurzel. Nun ist nur noch zu zeigen, daß man die niedrigste Zifer des Divisors allemal unter die höchste Zifer der neuen Klasse setzen, und alsdann diese Zahl nebst dem Ueberreste aus der ersten Klasse dividiren müsse. Es erhellet aber daraus: Wenn man von einer Wurzel,

die aus zween Theilen bestehet, das Quadrat machet z. B. aus $76 = 70 + 6$, so ist solches $= 70^2 + 2 \times 70 \times 6 + 6^2$. Nun ist $70^2 = 4900$ und $2 \times 70 \times 6 = 840$; endlich $6^2 = 36$. Hieraus ist offenbar; daß das Quadrat des ersten Theils unter den Hunderten, das doppelte Product unter den Zehnern, das Quadrat des letzten Theils unter den Einheiten zu suchen sey. Es bedeutet aber die höchste Zifer in der zwoten Klasse Zehner. Z. E. Das Quadrat von 76 ist = 57|76; die 7 in der zwoten Klasse ist = 7 Zehnern.

§. 103. Zus. In der Ausübung verfährt man bey Ausziehung der Quadratwurzel kurz auf folgende Art: I. Man theilt die Zahl in Klassen, und ziehet das Quadrat, das der Zahl in der ersten Klasse am näheſten kömmt, ab; die Wurzel dieses Quadrats wird aufgeschrieben. II. Man verdoppelt diese Wurzel, und dividirt damit den gefundenen Quotienten, oder den zweyten Theil der Wurzel setzet man neben dem Divisor, multiplicirt den Quotienten in diese Zahl, und ziehet das Product von der gegebenen Zahl ab.

```
Z. E.  57 | 76 | 76
       49 |
    --------
        876
        146
        876
       ------
          •
```

§. 104. Aufg. Aus einer Zahl, welche ein vollkommenes Quadrat ist, und deren Wurzel aus mehr als zween Theilen bestehet, die Wurzel zu finden.

Aufl. I. Man theilt die gegebene Zahl wieder in Klassen, jede zu zwo Zifern, von der Rechten gegen die Linke. II. Man sucht in dem Täfelchen (§. 98.), welcher Zahl ihr Quadrat der ersten Klasse zur Linken gleich, oder nächst kleiner ist, und ziehet das Quadrat von der Zahl ab. Die dazu gehörige Wurzel setzt man in die Stelle des Quotienten. III. Zu dem, was in dieser Klasse übrig bleibt, nimmt man nun die folgende Klasse. Hierauf verdoppelt man die gefundene Wurzel, und setzt ihre niedrigste Zifer unter die höchste Zifer der neuen Klasse. Man dividirt mit diesem doppelten in die Zifern, die darüber stehen, und bekömmt alsdann zum Quotienten den zweyten Theil der Wurzel. IV. Diesen gefundenen neuen Theil der Wurzel setzt man gleich neben den Divisor, und multiplicirt den gefundenen Quotienten in den Divisor und die dabey gesetzte Zahl. Dieses Product ziehe man von den darüber stehenden Zahlen ab. Läßt es sich aber von dem, was darüber stehet, nicht abziehen, so ist der Quotient zu groß genommen; man muß ihn also so lange vermindern, bis der Abzug angehet. V. Zu dem, was übrig bleibt, nimmt man die folgende Klasse, siehet so viel Theile der Wurzel, als man

gefunden hat, für einen an, und verfährt nach III. und IV.

```
Exemp. 11 | 669056 | 3416
        9 |
      ----
      2 | 66
          64
         256
        ----
         1090
          681
         -----
         40956
          6826
         40956
         -----
            0
```

§. 105. Zus. Multiplicirt man eine Zahl mit sich selbst, so entstehet das Quadrat der Zahl. Würde also 3416 durch 3416 multiplicirt, so muß, wenn dieses die rechte Wurzel ist, die zuvor gegebene Zahl herauskommen. Diese Operation kann derohalben zur Probe dienen, ob die wahre Wurzel gefunden sey.

§. 106. Lehrs. Aus einem Bruch wird die Wurzel gefunden, wenn man sie aus dem Zähler und Nenner ziehet.

Bew. Wenn man das Quadrat einen Bruchs macht; so wird der Bruch mit sich selbst multiplicirt, folglich Zähler in Zähler, und Nenner in Nenner. Daher entstehet das Quadrat des Zählers, und das

Qua-

Quadrat des Nenners. Die Wurzel aus dem Zähler und Nenner gezogen, giebt also auch wieder die Zahl, welche durch sich selbst multiplicirt worden, oder die Wurzel des Bruchs (§. 92.).

Exempel. $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$. Also auch $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$.

§. 107. Zus. Aus $\frac{1}{100} = 0,01$ ist also die Wurzel $= \frac{1}{10} = 0,1$, und aus $\frac{1}{10000} = 0,0001$ ist die Wurzel $= \frac{1}{100} = 0,01$. Ueberhaupt in Decimalbrüchen hat die Wurzel halb so viel Decimalstellen, als das Quadrat. Hätte man aber $\frac{1}{10}$, so liesse sich die Wurzel nicht aus dem Nenner ziehen; ebenfalls nicht aus $\frac{1}{1000}$; und überhaupt die Anzahl der Nullen muß gerade seyn, wenn sich die Wurzel aus dem Nenner soll ziehen lassen.

§. 108. Aufg. Aus einer Zahl, welche kein vollkommenes Quadrat ist, die Wurzel durch Näherung (per adproximationem) zu finden.

Aufl. Man hänge an die Zahl ein, zwey, drey u. s. w. Paar Nullen, und verfahre, wie im §. 104. Wenn man ein Paar 0 anhängt, so bekömmt die Wurzel ausser dem Ganzen noch Zehntheile; hängt man zwey Paar Nullen an, so bekömmt die Wurzel Hunderttheile u. s. w.

Exem-

```
Exemp.   5, | 00      | 2,2
         4  |         |
        ----|
         1  | 00
             4,2
             84
          -------
             16
```

Bew. Die Zahl 5 ist = $\frac{500}{100}$ = 5,00. Nun aber ist die Wurzel aus 5,00 = 2,2. Da das Quadrat 5,00 zwo Decimalstellen hat, so bekömmt die Wurzel halb so viel; also wird diese = 2,2 (§. 107). Man muß aber allemal eine gerade Anzahl Nullen an die Zahl setzen. Denn wo eine ungerade Anzahl angehängt ist, läßt sich die Wurzel nicht ausziehen (§. cit.). Z. E. 5 = $\frac{5000}{1000}$ setzen, so liesse sich die Wurzel weder aus dem Zähler, noch aus dem Nenner ziehen. Es zeigt sich auch so, daß man keine ungerade Anzahl anhängen dürfe. Die hinzugesetzten Nullen bedeuten Decimaltheile. Wenn nun zwo an eine Quadratzahl gesetzt werden; so bekömmt die Wurzel eine Decimalstelle. Würde man aber drey Nullen anhängen, so müßte die Wurzel anderthalb Decimalstellen haben; das aber widersinnig ist.

§. 109. Zus. Aus der vorigen Aufgabe ist offenbar, daß man sich einer Wurzel von einer Zahl, die kein vollkommenes Quadrat ist, durch angehängte 0 ungemein nähern kann. Z. E. Würde man vier Nullen angehängt haben; so hätte man die Wurzel in Hunderttheilen bekommen.

Z. E.

Z. E.

```
5, | 00 | 00 | 2,23
4  |    |    |
---
100
 42
 84
---
 1600
  443
 1329
---
  271
```

Es bleibt aber hier wieder ein Rest, und die vollständige Wurzel erlangt man niemals, wie man bey Segner Anfangsgr. der Arithm. §. 137, und Kästner Anfangsgr. IV. Kap. §. 24 sehen kann. Doch kann man den Fehler, den man begehet, so sehr verringern, daß er oft gar nicht in Betrachtung mehr kommen kann. Noch ist zu merken, daß, wenn hier die Probe gemacht werden soll, die Wurzel durch sich selbst multiplicirt, aber auch der Ueberrest noch hinzu addirt werden muß.

Exempel.

```
    2,23
    2,23
  ------
     669
    446
   446
  ------
  4,9729
     271
  ------
  5,0000
```

§. 110. Zus. Wenn die Zahl kein vollkommenes

Quadrat wäre, und mehr als eine Klasse hätte, so könnte man ebenfalls die Wurzel noch durch Näherung suchen.

```
Ex.   5 | 83 | 45,0000 | 24154
      4 |    |         |
    ------
      1  83
         44
      1  76
    ----------
         745
         745
         481
    -------------
         26400
          4825
         24125
    -----------------
          227500
           48304
          193216
    -----------------
           34284
```

§. 111. Lehrs. Wenn die Cubikwurzel um eine Zifer zunimmt; so nimmt der Cubus selbst um drey Zifern zu.

Bew Wenn eine Zahl dreymal durch sich selbst multiplicirt wird, so entstehet der Cubus der Zahl. Es sey also die Wurzel 1, so ist ihr Cubus 1

```
 10        1000
100        1000000 u.s.w.
```

§. 112. Zus. Theilt man also eine Cubikzahl in Klassen von der Rechten gegen die Linke, und giebt

der Klasse drey Zifern, so kann man daraus schliessen, wie viel Theile die Wurzel haben werde. Die letzte Klasse zur Linken kann aber weniger als 3 Zifern haben. Z. E. wäre die gegebene Zahl 1 | 0 0 0 ¦ 0 0 0, so hat diese Zahl drey Klassen, und also bestehet die Wurzel aus dreyen Zifern.

§. 113. Zus. Es ist keine Schwierigkeit, aus einer vollkommenen Cubikzahl, von der die Wurzel nur aus einer Zifer bestehet, die Wurzel selbst zu finden. Man darf nur die gegebene Zahl in dem Täfelchen (§. 98.) suchen, so findet man die Wurzel darüber. Z. E. aus 512 ist die Cubikwurzel 8.

§. 114. Lehrs. Der Cubus einer zweytheilichten Wurzel bestehet: 1.) aus dem Cubus des ersten Theils der Wurzel; 2.) aus dem dreyfachen Quadrate des zweyten Theils multiplicirt durch den ersten; 3.) aus dem dreyfachen Quadrate des zweyten Theils multiplicirt durch den ersten; und 4.) aus dem Cubus des zweyten Theils der Wurzel.

Bew. Es sey die Wurzel $24 = 20 + 4$; so ist das Quadrat davon $= 20^2 + 2 \times 20 \times 4 + 4^2$ Wenn nun das Quadrat wieder durch die Wurzel multiplicirt wird; so entstehet die Cubikzahl. Es muß also

$$20^2 + 2 \times 20 \times 4 + 4^2 \text{ durch}$$
$$20 + 4 \text{ multipliciret werden}$$

$$20^2 \times 4 + 2 \times 20 \times 4 \times 4 + 4^2 \times 4$$
$$20^2 \times 20 + 2 \times 20 \times 4 \times 20 + 20 \times 4^2$$

Dieses muß also zusammen addirt werden. Man überlege aber erst, daß in der ersten Reihe im zweyten Glied vorkömmt 4×4; das ist, das Quadrat von 4 oder 4^2. Im letzten Glied soll 4^2 durch die Wurzel multiplicirt werden, das giebt den Cubus von 4 oder 4^3. Eben so ist das erste Glied in der folgenden Reihe $= 20^3$. Im zweyten Glied kömmt vor $2 \times 20 \times 4 \times 20$. Da aber einerley Factoren, in verschiedener Ordnung in einander multiplicirt, einerley Product geben, so kann man setzen $2 \times 20 \times 20 \times 4$. Weil $20 \times 20 = 20^2$; so ist es $= 2 \times 20^2 \times 4$ folglich kann man alles so ansetzen.

$$20^2 \times 4 + 2 \times 20 \times 4^2 \times 4^3$$
$$20^3 + 2 \times 20^2 \times 4 + \quad 20 \times 4^2$$

$$20^3 + 3 \times 20^2 \times 4 + 3 \times 20 \times 4^2 + 4^3$$

Da nun 20 der erste Theil der Wurzel, und 4 der zweyte, so zeigt sich die Wahrheit des Lehrsatzes.

§. 115. Zus. Ist eine Zahl ein Cubus von einer zweytheilichten Wurzel, so müssen sich alle im Lehrsatze genannte Theile von der Zahl abziehen lassen.

§. 116. Zus. Es ist $20^3 = 8000$

$$3 \times 20^2 \times 4 = 4800$$
$$3 \times 20 \times 4^2 = 960$$
$$4^3 = 64$$

Und also der Cubus von 24 = 13824

Wäre 24 dreymal durch sich selbst multiplicirt worden, so wäre ebenfalls der Cubus davon entstanden.

$$\begin{array}{r} 24 \\ 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \\ 24 \\ \hline 2304 \\ 1152 \\ \hline 13824 \end{array}$$

wie vorher.

Zugleich kann man aus dieser Rechnung sehen, daß der Cubus des ersten Theils unter den Tausenden, das dreyfache Quadrat des ersten Theils mit dem andern multiplicirt unter den Hunderten, das dreyfache Quadrat des andern Theils mit dem ersten multiplicirt unter den Zehnern, die Cubikzahl des zweyten

Theils

Theils unter den Einheiten seine niedrigste Zifer habe.

§. 117. Aufg. Aus einer gegebenen vollkommenen Cubikzahl, deren Wurzel nur aus zwoen Zifern bestehet, die Wurzel zu finden.

Aufl. I. Man theilet die Zahl von der Rechten gegen die Linke in Klassen, so, daß die Klasse zur Rechten drey Zifern bekomme. Die andere kann weniger Zifern haben, wie aus §. 112 klar ist. II. Man suchet in dem Täfelchen den Würfel, welcher den Zahlen in der linken Klasse am nächsten kömmt, ziehet den Würfel von den darüber stehenden Zahlen ab, und setzet die Wurzel an die Stelle des Quotienten. III. Zu den Rest von der ersten Klasse nimmt man die folgende Klasse, macht alsdann das Quadrat des gefundenen ersten Theils der Wurzel, und multiplicirt selbiges mit 3. Dieses dreyfache Quadrat ist der neue Divisor. Man schreibt seine niedrigste Zifer unter die höchste der rechten Klasse, die übrigen aber weiter gegen die Linke, und dividirt damit die darüber stehenden Zahlen. IV. Man multiplicirt diesen Divisor in den neuen Theil des Quotienten, welches Product der zweyte Theil der Wurzel ist. V. Man macht das Quadrat des zweyten Theils der Wurzel, und multiplicirt selbiges in den vorhergehenden Theil der Wurzel ingleichen durch 3. Des Products niedrigste Zifer setzt man unter die

mitt=

mittlere Zahl der rechten Klasse, und die andern weiter gegen die Linke. VI. Man sucht den Würfel des zweyten Theils der gefundenen Wurzel, und setzt seine niedrigste Zifer unter die letzte Zifer der rechten Klasse. VII. Die nach III, IV, und V, gefundenen Zahlen werden zusammen addirt, und von der gegebenen subtrahirt.

Würfel.		Wurzel.
185	193	57
125	. . .	
60	193	
* 7	5 . .	
** 5 2	5 . .	
*** 7	3 5 .	
****	3 4 3	
60	193	
	0	

* Dreyfaches Quadrat des dreyfachen ersten Theils der Wurzel. ** Zweyter Theil der Wurzel multiplicirrt mit dem Divisor. *** Dreyfaches Quadrat des zweyten Theils der Wurzel multiplicirt durch den vorhergehenden. **** Cubus des zweyten Theils der Wurzel.

Bew. Alle Theile, welche ein Würfel nach §. 114 haben muß, sind von der gegebenen Zahl abgezogen worden, und folglich ist die Wurzel richtig gefunden worden. Nämlich nachdem der nächste Cubus subtrahirt worden, so war die Wurzel davon, auch der erste Theil der Wurzel von der gegebenen

 Zahl

Zahl. In dem Ueberreste und der folgenden Klasse sind also noch das dreyfache Quadrat des ersten Theils in den andern multiplicirt, das dreyfache Quadrat des zweyten Theils in den ersten multiplicirt, und der Cubus des zweyten Theils enthalten. Da aber die niedrigste Zifer des dreyfachen Quadrats des ersten Theils mit dem andern multiplicirt, in den Hunderten ist (§. 116.), so darf man nur 601 (wo die letzte Zifer ein Hundert bedeutet) durch das dreyfache Quadrat des ersten Theils dividiren, um den andern Theil der Wurzel zu bekommen. Denn, wenn ein Product wie hier 601 durch einen Factor, der hier $3 \times 5^2 = 75$ ist, dividirt wird, so erhält man den andern Factor zum Quotienten. Nachdem also die beyden Theile der Wurzel gefunden sind, so kann man das dreyfache Quadrat des zweyten Theils machen, und mit dem ersten multipliciren. Ingleichen läßt sich der Cubus des zweyten Theils der Wurzel angeben. Jedes Stück dieser drey genannten Theile, woraus die Cubikzahl bestehet, müßte von der gegebenen Zahl subtrahirt werden. Der Kürze wegen addirt man die drey Theile zusammen, und ziehet alsdann das Ganze von der gegebenen Zahl auf einmal ab.

§. 118. Zus. Wäre die Zahl, welche die Summe aus den drey letzten Theilen ist, woraus die Cubikzahl bestehet, größer, als die gegebene Zahl, so wäre dieses eine Anzeige, daß der zweyte Theil der

Wur-

Wurzel zu groß genommen worden, und man müßte ihn alsdann verringern.

§. 119. Aufg. Aus einer vollkommenen Cubikzahl, deren Wurzel aus mehr, als zween Theilen bestehet, die Wurzel zu finden.

Aufl. I. Man theilt die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Klassen, deren jede drey Zifern bekommt. Die letzte linker Hand kann weniger Zifern haben. II. Um die beyden ersten Theile der Wurzel zu finden, verfährt man mit den zwo ersten Klassen vollkommen so, wie §. 117 gelehrt worden. III. Zu dem, was nach Beobachtung dieser Regeln übrig bleibt, nimmt man die folgende dritte Klasse, und siehet die zwo gefundene Zifern der Wurzel als einen Theil der Wurzel an. Man macht davon das dreyfache Quadrat, und setzt die niedrigste Zifer davon wieder unter die höchste Zifer der neuen Klasse; die übrigen Zifern schreibt man aber weiter gegen die Linke. IV. Alsdann dividirt man damit die darüber stehende Zahl. Der Quotient ist der dritte Theil der Wurzel. V. Man multiplicirt den neuen Theil der Wurzel in den Divisor, und setzt das Product darunter. VI. Alsdann sucht man das dreyfache Quadrat des neuen Theils der Wurzel, und multiplicirt selbiges in die vorhergehende Theile der Wurzel. Man setzt dieses Products niedrigste Zifer unter die mittelste Zahl der neuen Klasse, und die übrigen Zifern weiter gegen

die Linke. VII. Man macht die Cubikzahl des neuen Theils der Wurzel, und setzt ihre niedrigste Zifer unter die letzte rechter Hand in der neuen Klasse, die übrigen Zifern schreibt man von da gegen die Linke. VIII. Man addirt die nach V, VI, VII gefundene Zahlen, und ziehet die Summe von den darüber stehenden Zifern der gegebenen Zahl ab. IX. Sind noch mehrere Klassen vorhanden, so siehet man die gefundenen Theile der Wurzel allemal als einen an, und verfährt nach den in III, IV, und folgenden Regeln.

Exempel. Wurzel.

```
158|164|877|312|   5408
125|
----
 33164
   75
 300
   240
    64
 -----
 32464
 -----
     700877
     8478
      0
     -----------
     700877312
      874800
     6998400
       1036 80
            512
     -----------
     700877312
     -----------
          0
```

In diesem Exempel wird der dritte Theil der Wurzel = o weil der Divisor 8478 in der darüber stehenden Zahl 7008 nicht Einmal enthalten ist.

§. 120. Zus. Da ein Würfel entstehet, wenn man eine Zahl dreymal durch sich selbst multiplicirt; so muß auch, wenn man eine Zahl als die Wurzel aus einem Würfel angiebt, diese Wurzel dreymal durch sich selbst multiplicirt dem gegebenen Würfel gleich seyn. Diese Operation kann zur Probe dienen, ob man die wahre Wurzel gefunden habe; z. E. würde 3408 dreymal durch sich selbst multiplicirt, so muß das Product der gegebenen Cubikzahl gleich seyn.

§. 121. Lehrs. Wenn man die Cubikwurzel aus einem Bruche ziehen soll, so ziehet man selbige sowohl aus dem Zähler, als dem Nenner des Bruches.

Bew. Der Cubus eines Bruches entstehet, wenn man den gegebenen Bruch dreymal durch sich selbst multiplicirt. Wird aber ein Bruch dreymal durch sich selbst multiplicirt, so entstehet daraus der Cubus des Zählers und der Cubus des Nenners; z. E. $\frac{3^3}{4^3} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$. Daher muß auch die Wurzel aus dem Zähler und Nenner gezogen werden, wenn die Wurzel des Bruchs verlangt wird.

§. 122. Zus. Es ist also die Cubikwurzel oder $\sqrt[3]{\frac{1}{1000}} = \frac{1}{10}$. Da nun $\frac{1}{1000} = 0,001$, so ist

ist $\sqrt[3]{0,001} = 0,1$. Ferner da $\sqrt[3]{\frac{1}{1000000}}$ $= \frac{1}{100}$, oder da $\frac{1}{1000000} = 0,000001$, so ist $\sqrt[3]{0,000001} = 0,01$. Aus dieser Rechnung ist klar, daß wenn die Cubikzahl drey Decimalstellen hat, die Wurzel nur eine bekömmt. Ueberhaupt zeigt sich, daß die Cubikzahl dreymal mehr Decimalstellen hat, als die Wurzel. Hätte ein Bruch 2, 4, 5, 8 u. s. w. Decimalstellen, so liesse sich die Cubikwurzel nicht ausziehen, z. E. 0,0001 ist $= \frac{1}{10000}$. Hier wäre aus dem Zähler die Wurzel 1, aus dem Nenner liesse sich selbige aber nicht ziehen.

§. 123. Aufg. Aus einer unvollkommenen Cubikzahl die Wurzel durch Näherung zu finden.

Aufl. Man hänge 3, 6, oder 9 u. s. w. Nullen an die gegebene Cubikzahl, und verfahre nach §. 119. Die Wurzel bezeichne man nach §. 122. Es wird z. E. die Zahl 67 gegeben, man soll die Wurzel durch Näherung finden.

67 | 4,061
64 |
―――
3|000
4|8
0000
―――
3000|000
4800
28800
4320
216
―――
2923416|
76584|000
49450|8
494508
12181
―――
49462981
―――
27121019

Bew. Daß die Zahl 67 durch die angehängten 0 nicht verändert worden, zeigt sich so: 67,000 heißt 67 Ganze, kein Zehntheil, kein Hunderttheil, kein Tausendtheil. Oder man kann sich so davon überzeugen: 67 ist $= \frac{67000}{1000}$ und dieses ist dann $= 67,000$; folglich wenn noch mehrere Nullen angehängt werden; so wird die gegebene Zahl ebenfalls nicht verändert. Ferner: da hier 9 Nullen angehängt worden, und da also die Cubikzahl 9 Decimalstellen hat, so bekömmt die Wurzel 3 Decimalstellen (§. 122.).

§. 124. Zus. Die Wurzel einer unvollkommenen Cubikzahl wird man immer genauer erhalten,

je

je mehr Klassen von Nullen man anhängt, aber nie wird man die Wurzel ganz, und vollkommen erlangen; weil man sonst ohne Ende fortfahren müßte. (Man sehe davon Kästner IV. Absch. §. 41. der Anfangsgr. der Arithm.) Wenn man also hier die Probe machen will, ob man in Ausziehung der Wurzel nicht gefehlt habe, so muß man, nachdem die Wurzel dreymal durch sich selbst multiplicirt ist, den Ueberrest noch zu den Product addiren; alsdann wird die gegebene Cubikzahl mit den angehängten o wieder herauskommen.

§. 125. Zus. Bestehet eine gegebene Cubikzahl aus mehr als einer Klasse, und ist sie kein vollkommener Würfel; so kann die Wurzel ebenfalls durch angehängte o genauer untersucht werden.

§. 126. Anm. Man hat Quadrat und Cubiktafeln, welche von den Zahlen nach der Reihe ihre Quadrate und Würfel enthalten. Wäre also eine Zahl gegeben, und es würde ihr Quadrat oder Cubikwurzel verlangt, so könnte man die Zahl in diesen Tafeln aufsuchen, und man fände die Wurzel daneben stehen. Es verstehet sich, daß es vollkommene Quadrate und Cubikzahlen sind; und daß diese gegebene Zahl nicht größer sey, als die in den Tafeln berechnete. Wäre aber eine unvollkommene Quadrat- oder Cubikzahl gegeben, so könnte man zum wenigsten die ganze Zahl finden, welche der Wurzel

am

am nächsten kömmt. Wie diese Tafeln können gebraucht werden, um die Wurzeln aus Cubikzahlen durch Näherung zu finden, zeigt H. Hofr. Kästner Anfangsgr. der Arithmet. Bey den zur Trigonometrie nöthigen Tabellen des Freyhr. v. Wolf, findet man solche Quadrattafeln. Sie sind bis auf die Wurzel 1000 berechnet. Das größte Quadrat ist also daselbst 1 Million, und der größte Würfel 100 Million. Im mathematischen Lexicon sind ebenfalls solche Tafeln, bis auf die Wurzel 10000. In Joh. Paul Buchners Tabula radicum & quadratorum gehen sie bis auf die Wurzel 12000. Joh. Ludolphs Tetragaenometria tabularia. Jen. 1712 enthält die Quadrate aller Wurzeln bis auf 100000.

§. 127. Anm. Wenn man in dem Cubiktäfelchen (§. 98.) die Wurzeln mit ihren Würfeln vergleichet, so findet man; wenn die Wurzeln sind:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

so sind die letzten Zifern der dazu gehörigen Würfel =

0 1 8 7 4 5 6 3 2 9

Aus dieser Betrachtung zeigt sich, daß man von jeder vollkommenen Cubikzahl, die nur zwo Klassen hat, die beyden Zifern der Wurzel ohne die gewöhnliche Ausziehung finden kann. Die erste giebt sich, wenn man in dem Täfelchen (§. cit.) den Würfel sucht, welcher den Zahlen in der linken Klasse am nächsten kömmt, und die Wurzel aufschreibt; die zwo-

te aber aus der Endzifer der rechten Klasse. Es sey z. B. der Würfel 829 | 684 gegeben. Der ersten Klasse kömmt der Würfel 729 am nächsten, und davon ist die Wurzel 9. Die Endzifer der andern Klasse ist 4, also der andere Theil der Wurzel ebenfalls 4. Noch mehr andere Betrachtungen über die Endzifern, um aus gegebenen vollkommenen Cubikzahlen die Wurzeln zu finden, enthält: A. C. V. H. **Ganz neu entdeckte Art, wie aus jeder Cubikzahl, welche nicht über 1000 Billionen gehet, die Cubikwurzel zu erforschen.** Dessau 1755. Doch kann man bey den gemeinen Cubiktafeln diese Vortheile großentheils, und bey den buchnerischen völlig entbehren. Denn da die buchnerischen bis auf die Wurzel von 12000 berechnet sind, so erstreckt sich der Würfel selbst bis in die Billionen. Eine gegebene Zahl, die nicht über eine Billion gehet, findet man also in diesen Tafeln.

IV. Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

§. 128. Erkl. Die Vergleichung einer Zahl mit einer andern von eben der Art in Ansehung der Größe heißt ein **Verhältniß** (ratio).

§. 129.

§. 129. Zus. Es werden also zwo Zahlen zu einem Verhältniß erfodert, und diese müssen von einer Art seyn. 2 Ellen würden sich also mit 3 Stunden nicht vergleichen lassen. Da man aber diese Zahlen in Ansehung der Grösse miteinander vergleichen soll; so kann dieses auf zwoerley Art geschehen. Erstens kann man untersuchen: wie viel Einheiten die eine mehr als die andere hat; z. B. wenn 8 und 2 gegeben sind; so läßt sich fragen, wie viel Einheiten 8 mehr als 2 enthält, dieses muß also durch die Subtraction geschehen. 8 hat wirklich 6 Einheiten mehr als 2. Zweytens läßt sich fragen: wie vielmal die eine grösser sey, als die andere; z. E. 8 ist viermal grösser als 2. Denn wenn man die Zahl 2 viermal nimmt, so entstehet 8. Man findet aber, wie vielmal eine Zahl grösser als die andere ist, wenn man untersucht, wie vielmal die eine in der andern enthalten ist, und folglich durch die Division. Denn so vielmal eine Zahl in der andern enthalten ist, eben so vielmal muß die andere grösser seyn als die erste, sonst könnte sie nicht in dieser andern so vielmal stecken.

§. 130. **Erkl.** Ein **arithmetisches Verhältniß** (ratio arithmetica) ist, wenn durch die Subtraction untersucht wird, um wie viel eine Zahl grösser ist, als die andere. Die Zahl, welche anzeigt, wie viel die eine grösser als die andere, heißt hier, wie bey der Subtraction, die Differenz. Auch

um ein arithmetisches Verhältniß anzuzeigen, gebraucht man das Subtractionszeichen; z. E. $15 - 9 = 6$.

§. 131. **Erkl.** Ein *geometrisches Verhältniß* (ratio geometrica) ist, wenn durch die Division untersucht wird, wie vielmal eine Zahl in der andern enthalten ist, oder was für ein Theil in der andern steckt. Der Quotient, welcher anzeigt, wie vielmal die eine Zahl grösser als die andere ist, bekömmt hier den Namen *Exponent* des Verhältnisses (Exponens rationis). Um ein geometrisches Verhältniß zwischen zwoen Zahlen anzudeuten, wird das Divisionszeichen gebraucht, z. E. $5 : 10 = \frac{10}{5} = 2$, wo 2 der Exponent ist. Wenn gefragt würde, was für ein Theil von 10 in 5 enthalten sey; so müßte 5 durch 10 dividirt werden. Es wäre also $\frac{5}{10}$, und alsdann wäre $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ der Exponent selbst, wie in der Lehre von den Brüchen ist gezeigt worden.

§. 132. **Zus.** Der Exponent eines Verhältnisses wird also gefunden, wenn man eine Zahl des Verhältnisses durch die andere Dividirt.

§. 133. **Erkl.** Die zwo Zahlen, woraus ein Verhältniß bestehet, nennet man die *Glieder des Verhältnisses* (termini rationis). Ein Glied, welches man als das erste ansiehet, wird das *vorhergehende* (terminus antecedens), und das andere, das *folgende* (consequens) genannt. Es ist

aber

aber willkührlich, welches von beyden man als das vorhergehende Glied annimmt.

§. 134. Anm. Wenn das Wort Verhältniß, ohne eines von den Beywörtern arithmetisch oder geometrisch hinzuzufügen, gesetzt wird, so pflegt man allemal das geometrische Verhältniß zu verstehen; weil die Alten nur geometrische Verhältnisse betrachtet haben, und selbe schlechthin Verhältnisse nannten.

§. 135. Erkl. Zwey arithmetische Verhältnisse sind gleich, wenn die Differenz zwischen den zwey Gliedern des einen Verhältnisses eben so groß ist, als die Differenz zwischen den beyden Gliedern des andern Verhältnisses. Z. E. Das Verhältniß 15 — 10 hätte zur Differenz 5 und das Verhältniß 8 — 3 hätte auch zur Differenz 5. Folglich wäre hier 15 — 10 = 8 — 3. Zwey geometrische Verhältnisse sind gleich, wenn beyde Verhältnisse gleiche Exponenten haben. Z. E. Wenn das Verhältniß 4 : 8 gegeben ist, so ist der Exponent hier 2. Wäre also noch ein Verhältniß 5 : 10 gegeben, so wäre der Exponent ebenfalls 2. Folglich wären die Verhältnisse einander gleich. Andere Schriftsteller nennen diese Verhältnisse ähnliche Verhältnisse, weil sie durch nichts unterschieden, und alles einerley ist, ausgenommen die Grösse der Zahlen, woraus die Verhältnisse bestehen. Wenn man hiemit die gleich anfangs gegebene Erklärung von ähnlichen

Dingen (§. 19.) vergleichet, so wird der Grund dieser Benennung sich noch deutlicher zeigen.

§. 136. **Erkl.** Die Gleichheit zweyer Verhältnisse von einer Art, oder nach andern die Aehnlichkeit zweyer Verhältnisse, (aequalitas, similitudo, identitas) heißt eine **Proportion**. Da es nun nur zweyerley Arten Verhältnisse giebt, arithmetische, und geometrische; so entstehet aus der Gleichheit zweyer arithmetischen Verhältnisse eine **arithmetische Proportion** (proportio arithmetica) z. E. 8 — 5 = 7 — 4. Die Gleichheit zweyer geometrischer Verhältnisse giebt eine **geometrische Proportion** (proportio geometrica) z. E. 4: 12 = 5: 15. Wenn vier Zahlen eine Proportion ausmachen, so sagt man: diese vier Zahlen sind in der Ordnung, wie sie stehen, **proportional**. Die beyden vorhergehenden oder beyde nachfolgende Glieder in den zweyen Verhältnissen, welche die Proportion ausmachen, nennt man jedes Paar für sich, **gleichnahmige**, oder **ähnlich liegende Glieder** (termini homologi). Z. B. in der vorigen Proportion 4: 12 = 5: 15 wäre 4 und 5 ein Paar, und 12 und 15 das andere Paar gleichnahmige Glieder.

§. 137. **Anm.** Das natürlichste Zeichen eine Proportion auszudrücken, ist, wie man aus dem Begriff selbst schließen kann, das Gleichheitszeichen, welches zwischen zwey Verhältnisse gesetzt wird. Der

Baron

Baron Leibnitz hat solches zuerst eingeführet. Die französischen und engländischen Gelehrten brauchen statt dessen oft dieses Zeichen $\div$

§. 138. Zus. Das Kennzeichen einer arithmetischen Proportion ist also, wenn beyde Verhältnisse einerley Differenz haben, und das Kennzeichen einer geometrischen, wenn beyde Verhältnisse einerley Exponenten haben. Wenn vier Zahlen proportional sind, so pflegt man sich so auszudrücken: wie sich die erste zur andern verhält, so verhält sich die dritte zur vierten. Es ist aber aus den gegebenen Erklärungen leicht abzunehmen, daß dieser allgemeine Ausdruck bey der arithmetischen Proportion eine andere Bedeutung als in der geometrischen hat. Bey der ersten hat er den Sinn: um wie viel Einheiten die erste Zahl größer oder kleiner ist, als die andere, um eben so viel Einheiten ist die dritte größer oder kleiner als die vierte. Bey der geometrischen heißt er: so vielmal die erste Zahl die andere enthält, oder in der andern enthalten ist, eben so vielmal enthält die dritte die vierte Zahl, oder eben so vielmal ist die dritte in der vierten enthalten.

§. 139. Lehrs. Wenn in einer arithmetischen Proportion ein Paar gleichnahmige Glieder gegeben sind, und die Differenz bekannt ist, so kann eine Proportion daraus gemacht werden. Eben so läßt sich aus einem Paar gleichnahmigen Gliedern und dem

Exponenten eine geometrische Proportion machen.

Bew. Zwey Verhältnisse, welche eine gleiche Differenz haben, und worinn die Glieder in einerley Ordnung aufeinander folgen, das heißt; wenn in einem Verhältnisse das kleinere Glied das vorhergehende ist, so muß auch im andern Verhältnisse das kleinere das vorhergehende seyn; solche zwey Verhältnisse machen eine Proportion aus: Da nun die Differenz und ein Paar gleichnahmige Glieder z. B. die vorhergehenden gegeben sind, so erhält man in jedem arithmetischen Verhältniß das folgende Glied, wenn man die gegebene Differenz zu jeden der vorhergehenden addirt. Beyde Verhältnisse erhalten dadurch gleiche Differenz, und die Verhältnisse werden selbst dadurch einander gleich. Denn wenn zu jeder von zwoen Zahlen eine andere beydesmal gleich addirt wird, und von dieser Summe die gegebenen Zahlen wieder subtrahirt werden; so ist ein gleicher Unterschied. Z. E. Es seyen die vorhergehenden Glieder zweyer Verhältnisse 5 und 8, die Differenz sey 4. Wenn das nachfolgende Glied größer soll werden, so ist das erste Verhältniß 5 — 9, und das zweyte 8 — 12, folglich 5 — 9 = 8 — 12.

Für die geometrische Proportion wird der Satz so bewiesen: in einem geometrischen Verhältnisse ist der Exponent der Quotient, welcher anzeigt, wieviel-

vielmal das kleinere Glied im Größern enthalten ist. Das kleinere Glied ist also der Divisor, das größere der Dividendus. Nun bekömmt man den Dividendus, wenn man den Divisor mit dem Quotienten multiplicirt, und folglich das größere Glied, wenn man das kleinere Glied mit dem Exponenten multiplicirt. In dem andern Verhältnisse wird das größere Glied auf eben die Art erlangt: und da in beyden Verhältnissen das kleinere Glied mit dem nämlichen Exponenten multiplicirt wird, so muß auch, wenn man in beyden das größere durch das kleinere dividirt, der nämliche Exponent heraus kommen. Denn, wenn zwo verschiedene Zahlen durch einerley Dritte multiplicirt, und jedes Product durch die verschiedene wieder dividirt werden, so ist der Quotient die Zahl, womit beyde multiplicirt werden. Solche zwey Verhältnisse aber, die gleiche Quotienten haben, und worin die Ordnung der Glieder einerley ist, machen eine Proportion aus (§. 136.). Es seyen z. B. ein Paar vorhergehende Glieder in zweyen Verhältnissen 5 und 6, der Quotient 3, so wird das erste Verhältniß 5 : 15 das andere 6 : 18 folglich 5 : 15 = 6 : 18.

§. 140. **Erkl.** Wenn in einer Proportion das zweyte Glied dem dritten gleich ist, so nennt man es eine stetige Proportion (Proportio continua); sind aber die Glieder verschieden, so ist es eine dis-

 crete

crete Proportion (proportio discreta). Eine stetige arithmetische Proportion (proportio arithmetica continua) ist also eine arithmetische Proportion, worinn das zweyte Glied dem dritten gleich ist, z. E. 5 — 12 = 12 — 19. Eine stetige geometrische Proportion (Proportio geometrica continua) würde eine geometrische Proportion seyn, worinn das zweyte dem dritten Gliede gleich wäre. Z. E. 3 : 6 = 6 : 12.

§. 141. Lehrs. In einer arithmetischen Proportion ist die Summe der beyden äussersten Glieder (das heißt des ersten und vierten Gliedes) der Summe der beyden mittlern (oder des zweyten und dritten) gleich. Z. B. Es sey 3 — 7 = 9 — 13, so ist 3 + 13 = 7 + 9.

Bew. Um den Beweis kürzer übersehen zu können, so will ich das erste Glied I, das zweyte Glied II, das dritte III, das vierte IV nennen, und die Differenz *d*.

Es ist also das erste Glied = I.

Das zweyte Glied erhält man aber, wenn man zum ersten die Differenz addirt (§. 139.): folglich ist II = I + *d*.

Das dritte ist = III. Und das vierte kömmt heraus, wenn man zum dritten die Differenz addirt (§. cit.). Es ist also IV = III + *d*.

Nun

Nun addire man das erste und vierte Glied. Ihre Summe ist = I + III + *d*. Man addire das zweyte und dritte; so ist ihre Summe = I + *d* + III. Hieraus ist nun offenbar, daß beydes gleiche Summen giebt. Nämlich jede Summe bestehet aus dem ersten und dritten Glied, und der Differenz.

§. 142. Zus. In der stetigen arithmetischen Proportion ist die Summe der beyden äussersten Glieder gleich einem von den mittlern Gliedern doppelt genommen. Z. E. 8 — 7 = 7 — 6. Da ist 8 + 6 = 2 × 7. Denn weil in einer jeden arithmetischen Proportion die Summe der beyden äussern Glieder der Summe der beyden mittlern gleich ist, und in einer stetigen die beyden mittlern einerley sind; so erhält man durch die Addition eines der mittlern zweymal.

§. 143. Zus. Aus vorigem Zusatz zeigt sich, wie man zu zwoen gegebenen Zahlen die mittlere arithmetische Proportionalzahl finden könne. Es sey 5 und 7 gegeben: 5 + 7 wird also die Summe der beyden äussern Glieder, und 12 dem mittlern Gliede doppelt genommen gleich seyn. Wird nun 5 + 7 durch 2 dividirt, so erhält man eines der mittlern Glieder, das dann mit dem andern einerley ist; $\frac{5+7}{2} = 6$. Es ist derohalben 5 — 6 = 6 — 7. Man addirt also die zwo gegebenen Zahlen, und halbirt ihre Summe, so kömmt die gesuchte mittlere arithmetische Proportionalzahl heraus.

§. 144. Aufg. Wenn drey Zahlen gegeben sind, die vierte arithmetische Proportionalzahl zu finden.

Aufl. Man addire die zwote und dritte Zahl, und von der Summe ziehe man die erste ab, der Rest ist die vierte gesuchte arithm. Proportionalzahl. Z. E. zu 5, 11, 13 wird die vierte gesucht. 11 + 13 = 24, davon 5 abgezogen, bleibt 19. Und es ist 5 — 11 = 13 — 19.

Bew. Die Summe der beyden äussersten Glieder ist der Summe der beyden mittlern gleich (§. 142.), oder I + IV = II + III. Und da gleiches von gleichem subtrahirt gleiche Differenz übrig läßt (§. 25. VI.); so subtrahire man auf beyden Seiten das erste Glied. Es ist alsdann IV = II + III — I.

§. 145. Lehrs. In einer geometrischen Proportion kann man das zweyte Glied zum ersten, und das vierte zum dritten machen, und die Glieder bleiben noch Proportional. Z. B. Wenn 6 : 12 = 5 : 10 so ist umgekehrt (invertendo) 12 : 6 = 10 : 5.

Bew. Zwey Verhältnisse, worinn die Glieder in einerley Ordnung folgen, und die gleiche Exponenten haben, machen eine Proportion aus: Nun aber wenn man das zweyte Glied in einer Proportion zum ersten macht, und das vierte zum dritten; so

so wird einerley Ordnung in den Gliedern beobachtet, und überdas sind die Exponenten gleich. Folglich müssen auch diese zwey Verhältnisse, worinn die Glieder umgekehrt sind, noch eine Proportion ausmachen.

§. 146. Lehrs. Wenn vier Zahlen eine geometrische Proportion ausmachen, so ist, wenn man das erste Glied mit dem vierten multiplicirt, das entstandene Product so groß, als das, welches entstehet, wenn man das zweyte mit dem dritten Glied multiplicirt. Oder kürzer: In einer geometrischen Proportion ist das Product der beyden äussersten Glieder dem Producte der mittlern gleich. Z. E. Wenn $4 : 12 = 2 : 6$, so ist $4 \times 6 = 12 \times 2$.

Bew. Es sey hier wieder das erste Glied I das zweyte II, das dritte III, das vierte IV und der Exponent e.

Das zweyte Glied entstehet, wenn man das erste mit dem Exponenten multiplicirt. Folglich $II = I \times e$ (§. 139.). Das vierte Glied entstehet, wenn man das dritte mit dem nämlichen Exponenten multiplicirt. Folglich $IV = III \times e$. (§. cit.). Nun multiplicire man das erste und vierte Glied, so ist das Product $= I \times III \times e$. Man multiplicire ebenfalls das zweyte Glied mit dem dritten; so ist das Product $= I \times e \times III$. Hieraus ist aber offenbar, daß beyde Producte gleich sind,

denn

denn jedes entstehet, wenn man das erste und das dritte Glied, und den Exponenten der Proportion miteinander multiplicirt.

§. 147. Zus. In einer stetigen geometrischen Proportion ist das Product der äussern Glieder gleich der Quadratzahl eines der mittlern Glieder z. E. 2 : 8 = 8 : 32, da ist 2 × 32 = 8 × 8 = 8^2.

§. 148. Zus. Der vorige Zusatz lehrt zugleich, wie man zu zwoen gegebenen Zahlen die mittlere geometrische Proportionalzahl finden kann. Man multiplicirt die gegebenen Zahlen miteinander, und das Product ist dem Quadrat der mittlern Proportionalzahl gleich. Zieht man also die Wurzel aus diesem Product, so bekömmt man die mittlere Proportionalzahl. Es sey z. B. gegeben 8 und 72; so ist 8 × 72 = 576. Die $\sqrt{576}$ ist aber = 24. Folglich 8 : 24 = 24 : 72.

§. 149. Lehrs. Wenn zwo Zahlen durch einerley dritte multiplicirt werden, so verhalten sich die Producte, wie die multiplicirten Zahlen. Es sey z. E. 3, 4. Man multiplicire beyde durch 5, so ist 3 : 4 = 15 : 20.

§. 150. Zus. Auf gleiche Art wird gezeigt, daß wenn zwo Zahlen durch einerley dritte dividirt werden, die Quotienten sich wie die dividirten Zahlen verhalten. Z. B. Es sey 5 : 20. Man dividire jede durch 5, so ist 5 : 20 = 1 : 4. Ferner siehet

man

man hieraus, daß aus zween gleichen Brüchen eine Proportion gemacht werden kann. Z. B. Da $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, so ist 2 : 3 = 8 : 12.

§. 151. Lehrs. Wenn vier Zahlen proportional sind, so verhält sich auch wechselweise (permutando, alternando, viciſſim) das erste Glied zum dritten, wie das andere zum vierten. Z. E. Wenn 2 : 4 = 8 : 16, so ist auch 2 : 8 = 4 : 16.

Bew. Das zweyte Glied ist = I × e und das vierte = III × e (§. 139.): Da nun I : I × e = III : III × e; so kann man auch schliessen, I : III = I × e : III × e. Denn wenn zwo Zahlen I und III durch einerley dritte (das hier der Exponent e ist) multiplicirt werden, so verhalten sich die Producte wie die multiplicirten Zahlen (§. 149.).

§. 152. Lehrs. Man findet zu dreyen gegebenen Zahlen die vierte geometrische Proportionalzahl, wenn man die zweyte und dritte miteinander multiplicirt, und das Product durch die erste dividirt. Z. B. man verlangt zu 6, 8 und 12 die vierte geometrische Proportionalzahl; so ist 8 × 12 = 96 und dividirt durch die erste oder $\frac{96}{6} = 16$, derohalben 6 : 8 = 12 : 16.

Bew. Es ist das Product der beyden äussern Glieder gleich dem Product der Mittlern (§. 146.);

oder

oder I × IV = II × III, wenn man daher beyderseits mit dem ersten Glied dividirt, so ist $\frac{I \times IV}{I}$ $= \frac{II \times III}{I}$ oder IV $= \frac{II \times III.}{I}$ das heißt: das vierte Glied ist gleich der Zahl, welche entstehet, wenn man das zweyte mit dem dritten Glied multiplicirt, und durch das erste dividirt.

§. 153. Zus. Wäre also 1, 5 und 6 gegeben; so wäre das vierte Proportionalglied $= \frac{5 \times 6}{1}$ oder 5 × 6. Und 1 : 5 = 6 : 30, das heißt: die Einheit verhält sich zu einen gegebenen Factor, wie der andere Factor zum Product, oder kürzer: die Einheit, die zween Factoren und das Product stehen in Proportion.

§. 154. Zus. Wäre 2, 6, 1 gegeben, so ist die vierte Proportionalzahl $\frac{6 \times 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$; und 2 : 6 = 1 : 3. Hier ist 6 der Dividendus, 2 ist der Divisor, und 3 der Quotient. Folglich verhält sich der Divisor zum Dividendus, wie die Einheit zum Quotienten.

§. 155. Anm. Man heißt den Lehrsatz, der §. 152 ist angeführt worden, die Regeldetri, weil er lehrt, wie aus dreyen gegebenen Gliedern das vierte zu finden sey. Sie ist im gemeinen Leben von ungemein guten Gebrauche, und kann alsdann sicher angewendet werden, wenn von den vier Zahlen, von

denen

denen die Frage ist (Termini quaestionis) zwo Zahlen sich wie die zwo übrigen verhalten. Z. E. Man weis, daß sich insgemein Mengen von einerley Waaren wie ihre Werthe verhalten; das heißt, wenn man für ein Pfund von einer Waare eine gewisse Summe Geldes bezahlen muß, so muß man für das doppelte dieser Quantität Waare, auch das doppelte des Geldes bezahlen; für das dreyfache der Waare dreymal also viel Geld u. s. f. So verhalten sich auch Arbeiten wie die Zeiten ꝛc. Z. B. Wenn ein Mensch immer gleich stark arbeitet; so wird er auch in der doppelten Zeit doppelt so viel Arbeit verrichten. Wenn also 3 Pf. 7 fl. kosten, und man fragte, was 50 Pf. kosten würden; so müßte man sagen 3 Pf : 50 Pf = 7 fl : $\frac{7 \times 50}{3}$ fl; das ist: 116 fl. $\frac{2}{3}$ fl. Sonst pflegt man gleich das Exempel so zu setzen: 3 Pf. : 7 fl = 50 Pf : IV, und übrigens dieselbe Regel der Auflösung zu beobachten, wo dann eben das nämliche wie vorher zum vierten Glied erhalten wird. Eigentlich kann 3 Pf : 7 fl kein Verhältniß geben (§. 128.), und die Ordnung der Glieder taugt aus diesem Grunde nichts. Man siehet aber in dieser Rechnung die Zahlen 3, 7, 50 und die vierte gesuchte nur als unbekannte Zahl an, die eine Proportion ausmachen; man denkt nicht daran, daß sie sich auf verschiedene Einheiten beziehen; und dann ist die Verwechselung erlaubt. Die mathematische Ordnung der Glieder hat den Vortheil, daß

sie

sie gleich darauf siehet, die Proportion bey den Zahlen aufzusuchen, wo die Regeldetri angebracht werden soll. Man kann dadurch nicht so leicht fehlen, und irgend die Regel da anbringen, wohin sie nicht gehört, oder da, wohin sie gehört, falsch anwenden.

§. 156. Anm. Bey verschiedenen Sachen läßt sich die Regel detri nicht gebrauchen. Z. E. Wenn einer einen Diamant von 3 Karat für 40 fl. gekauft hätte; und er wollte wissen, was einer von 6 Karat kostete, so darf er nicht setzen 3 K. : 40 fl. = 6 : IV, weil für einen Diamant von einem doppelten Gewicht nicht das doppelte Geld, sondern vielmehr bezahlt wird. Ueberhaupt, ehe die Regel detri gebraucht werden kann, muß man bedenken, ob die Sachen, von denen die Rede ist, in eine Proportion gebracht werden können. Manchmal ist dieses letztere nicht gleich zu ersehen. Z. B. Es hätte jemand gefunden, daß ein Körper in der Zeit von einer Secunde 15 Schuh hoch gefallen wäre; so kann er nicht daraus finden, wie viel Schuh er in 2, 3 und mehrern Secunden durchlaufe. Die Mechanik und Naturlehre zeigen uns, daß ein solcher Körper in zwoen Secunden einen viel grössern Raum durchlaufe, als man hier durch die Regel detri findet; und von diesen Fällen findet man mehrere in der Ausübung, wo nämlich die Glieder in keine Proportion gesetzt werden können.

§. 157.

§. 157. Anm. Im §. 155 wurde gefunden, daß 7 Pf. $116\frac{2}{3}$ fl. kosteten. Wollte man nun wissen, wie viel $\frac{2}{3}$ fl. an Groschen ausmachte; so wäre die Proportion anzusetzen $3 : 2 = 20 :$ zu der vierten Zahl, welche dann $= \frac{2 \times 20}{3} = 13\frac{1}{3}$ Groschen (§. 150.). Ein Gulden macht nämlich 20 Groschen aus. Man darf also schliessen. Wenn der fl. in 3 Theile getheilt wird; so sollen 2 genommen werden (denn dieses zeigt der Bruch $\frac{2}{3}$ an); wenn der fl. in 20 Theile getheilt wird, wie viel müssen dann dieser Theile genommen werden; und dieses ist die oben angesetzte Proportion. Es ist für sich klar, daß der $\frac{1}{3}$ Groschen einen Kreutzer oder 4 Pf. ausmacht. Hätte man es aber nicht gewußt, so müßte es durch diese Proportion gefunden werden: $3 : 1 = 12 :$ zu der gesuchten Anzahl von Pfenningen. Nämlich man darf schliessen. Wenn der Groschen in 3 Theile getheilt wird, so soll 1 Theil genommen werden (denn dieß zeigt wieder der Bruch $\frac{1}{3}$); wenn nun der Groschen in 12 Theile getheilt wird, wie viel müssen davon genommen werden. Aus diesem bisher angeführten entspringt die Regel, deren sich sonderlich die Kaufleute in der Ausübung zu bedienen pflegen: Man multiplicirt den Zähler des Bruchs, dessen Werth sich in einer grössern Geldsorte nicht schicklich angeben läßt (z. E. $\frac{2}{7}$ fl.) mit allen Theilen, die zusammen genommen das Ganze ausmachen, und

von welchen man sucht, wie viel auf den Bruch gehen; man dividirt das Product mit dem Nenner. Z. E. wollte man die $\frac{2}{7}$ in Kreutzern ausdrücken, so müßte der Zähler mit 60 multiplicirt werden, es wäre also $\frac{2 \times 60}{7} = \frac{120}{7} = 17\frac{1}{7}$ Kr. Der $\frac{1}{7}$ Kr. könnte noch in Pf. angegeben werden. Es müßte nach dieser Regel der Zähler mit 4 multiplicirt werden. Es wäre also $\frac{4}{7}$ Pf. wofür man einen ganzen Pf. nehmen kann; weil der Bruch größer als $\frac{1}{2}$.

§. 158. Anm. Manchmal ist es nöthig, bey genannten Zahlen die Glieder erst auf einerley Einheiten zu bringen, damit man die Verhältnisse übersehen, und gehörig multiplicieren, und dividiren könne. Z. B. 3 Pf. 7 Loth kosten 7 fl. 3 Gr. was kosten 20 Pf. 13 L. 2 Quentchen. Weil nun 32 Loth auf ein Pf. und 4 Quentchen auf ein Loth gehen, so ist das erste Glied = 103 Loth = 412 Qu. Das zweyte 143 Groschen, das dritte = 2614 Quentchen. Folglich

$$412 : 143 = 2614 : \frac{2614 \times 143}{412} = 907\frac{118}{412}$$

Gr. $= 45$ fl. $7\frac{118}{412} = 45$ fl. 7 Gr. $3\frac{90}{206}$ Pf.

§. 159. Anm. Wenn das erste oder dritte Glied = 1 oder keine allzugrosse Zahl ist, so kann man diese Reduction ersparen. Z. E.

1 Pf. kostet 3 fl. 8 Gr. 6 Pf. was kosten 5 Pf. nämlich das zweyte Glied multiplicirt mit 5, wird das vierte Glied = 17 fl. 2 Gr. 6 Pf.

§. 160.

§. 160. Anm. Wenn sich das erste und zweyte Glied oder das erste und dritte Glied durch die nämliche Zahl dividiren lassen, so braucht man statt dieser Glieder die Quotienten, und erhält eben das verlangte vierte Glied.

Z. E. 18. Pf. kosten 30 fl. was kosten 33 Pf. Hier könnte man die beyden ersten Glieder mit 6 dividiren, und es bliebe die Proportion, weil die Quotienten sich verhalten, wie die dividirten Zahlen. Es wäre also

3 : 5 = 33 : IV Glied. Man könnte hier wieder das erste und dritte Glied mit 3 dividiren, weil es erlaubt ist, permutando zu schliessen, nämlich 3 : 33 = 5 : IV Glied, und die zwey ersten Glieder können dividirt werden, wie schon vorher gezeigt worden. Derohalben ist:

1 : 5 = 11 : IV Glied. Folglich das IV Glied = 5 × 11 = 55 fl.

§. 161. Anm. Noch eine andere Verkürzung kann angebracht werden, wenn die Zahlen, die gleiche Namen haben, um 1 unterschieden sind. Z. B. 5 Pf. kosten 40 fl. was 6 Pf. Weil hier der Preiß von 5 Pf. bekannt ist; so wäre es nöthig, nur noch den Preiß von 1 Pf. zu wissen, welchen man dann zu dem von 5 Pf. hinzu addiren müßte, um den Preiß von 6 Pf. zu erhalten. Deswegen müßte aber die Proportion gemacht werden. 5 Pf. kosten 40 fl.

was 1 Pf. Da 1 nicht multiplicirt, so siehet man, daß man den Preiß von 1 Pf. erhalte, wenn 40 durch 5 dividirt wird. Das IV Glied würde also in der obigen Proportion gefunden werden

$$5 : 40 = 6 : 40 + \frac{40}{5} = 48 \text{ fl.}$$

Noch mit mehr Bequemlichkeit liesse sich hier die vorige Anmerkung §. 160 anwenden. Diese und die vorangeführten Vortheile heissen die welsche Praktik. Hr. Hofrath Kästner sagt davon: "Wer viel rechnet, und die Gründe der Rechnungen verstehet, erfindet sie selbst, und einem andern ist nichts an ihnen gelegen.„ — Es wird aber hierzu, daß man den Grund dieser Rechnungen einsiehet, hauptsächlich die Lehre von den Proportionen erfodert. Diese Lehren haben hier nicht vollständig genug können abgehandelt werden. In den Anfangsgründen der Algebra wird diese wichtige Lehre nebst ihren Anwendungen vorgetragen werden. Hat man sie einmal inne, und es wollte sich jemand der Kaufmannschaft, oder einem ähnlichen Gewerbe widmen, der dürfte nur alsdann einen practischen Schriftsteller nachlesen, so wird er die Vortheile leicht einsehen, und den Grund der Rechnungen leicht entdecken.

§. 162. Anm. Eine Anwendung der Regel Detri ist die gemeine Gesellschaftsrechnung (regula societatis.). Man nimmt dabey an, was Aristoteles von der Austheilungsgerechtigkeit gelehret hat.

Z. B.

z. B. Drey Kaufleute haben ein Kapital von 2600 fl. zusammen gelegt, und zwar der erste hat 1000 fl. der andre 700 fl., der dritte 900 fl. gegeben, mit diesen 2600 fl. sind 1500 fl. gewonnen worden; man fragt, was eines jeden sein Antheil am Gewinnste sey. Und da ist es freylich billig, daß der, dessen Einlage stärker gewesen ist, auch einen grössern Gewinnst bekomme. Man kann also schließen: wie sich das ganze Kapital zu der Einlage des ersten verhält, so verhält sich der ganze Gewinnst zum Gewinnst des ersten. Oder in Zahlen.

$$2600 : 1500 = 1000 : \frac{15 \times 1000}{26} = 576 \frac{12}{13}$$

Den Gewinnst des andern würde man durch die Proportion finden:

$$2600 : 1500 = 700 : \frac{1500 \times 7}{26} = 403 \frac{11}{13}$$

Der Gewinnst des dritten würde gefunden:

$$2600 : 1500 = 900 : \frac{1500 \times 9}{26} = 519 \frac{3}{13}$$

Die Einlagen aller drey verhalten sich gegen einander wie 1000 : 700 : 900, und der Gewinnst ist 1500. Es käme aber hier eigentlich darauf an, daß durch Gründe gezeigt würde, der Gewinnst 1500 sey in dem Verhältniß, das die drey Einlagen gegen einander haben, vertheilet worden. Hier läßt sich der Beweis noch nicht beybringen; er wird in der Algebra folgen. Es müssen übrigens die Gewinnste aller drey zusammen so groß, als der ganze Gewinnst seyn. Dieses kann zur Probe dienen, ob man recht gerechnet habe.

§. 163. Anm. Die Vermischungsrechnung (regula alligationis) ist mit der Gesellschaftsrechnung einerley, und sie hat sonderlich in der Medicine ihren Nutzen. Man sucht durch sie, wie viel von jeder einfachen Materie zu einer gegebenen Menge der vermischten genommen werden muß, wenn die Verhältnisse der einfachen gegeben sind. Z. E. Mieth in der Geschützbeschreibung nimmt zu gutem Schießpulver 1 Pf. Salpeter, 6 Loth Kohlen, und 4 Loth Schwefel. Wenn man wissen will, wie viel man von jedem nehmen müsse zu einem Centner oder 100 Pf. Pulver; so müßte man erst die 3 einfachen Materien zusammen addiren. Um die Rechnung etwas kürzer zu machen, könnte man von jedem die Hälfte nehmen, weil sich alle drey Zahlen durch 2 dividiren lassen, und es hier nur auf Verhältnisse ankömmt. Also

16 Loth Salpeter.
3 Loth Kohlen.
2 Loth Schwefel.

21 Loth Pulver.

Nun schliesse man, zu 21 Loth Pulver müssen 16 Loth Salpeter genommen werden, wie viel zu 100 Pf. oder 3200 Loth, und so mit jedem:

$21 : 16 = 3200 : \frac{3200 \times 16}{21} = 2438\frac{2}{21}$ Loth $= 76$ Pf. $6\frac{2}{21}$ L.

$21 : 3 = 3200 : \frac{3200 \times 3}{21} = 457\frac{3}{21}$ Loth $= 14$ Pf. $9\frac{3}{21}$ L.

$21 : 3 = 3200 : \frac{3200 \times 2}{21} = 304\frac{16}{21}$ Loth $= 9$ Pf. $16\frac{16}{21}$ L.

Die Probe ist hier wieder wie in der vorhergehenden Anmerkung (§. 162.). Die drey gefundenen einfachen Materien müssen = 100 Pf. seyn, wenn sie zusammen addirt werden.

§. 164. Anm. Wenn sich ein Paar Grössen verkehrt (reciproce) wie ein Paar andere verhalten, so nennet man sie die verkehrte Regel detri (regula trium inversa). Bisher sind nur solche Fälle betrachtet worden, wo die ähnlich liegenden Glieder von beiden Verhältnissen einerley Ordnung hatten. Es kann sich aber zutragen, daß die ähnlich liegenden Glieder sich nicht so, wie Waaren und ihr Werth in der geraden Ordnung, sondern in einer umgekehrten Ordnung befinden. Z. E. 10 Menschen verrichten eine Arbeit in 6 Tagen; man fragt, wie viel Menschen man nöthig hätte, um diese Arbeit in 3 Tagen, oder der Hälfte der vorigen Zeit zu vollenden. Da ist nun offenbar, daß man doppelt so viel Arbeiter, als vorher nöthig hat, und das Verhältniß der Zeiten 6 T : 3 T ist mit dem Verhält-

niß der Arbeiter 10 A: 20 A in umgekehrtem Verhältniße. Um nun solche Aufgaben aufzulösen, ist erst nöthig, zu wissen, in welchem Verhältniß sich die gegebenen Grössen befinden, und alsdann muß man sie solchergestalt ordnen, daß dieselben in eine Proportion zu stehen kommen. Das vorige Exempel würde so stehen

$$3\ T : 6\ T = 10\ A : \frac{6 \times 10}{3}\ A = 20\ A.$$

Man mußte hier überlegen, daß man im vierten Glied eine größere Zahl finden würde, weil man in weniger Zeit, um die nämliche Arbeit zu Stande zu bringen, mehr Arbeiter braucht. Hieraus ist aber abzunehmen, daß in dem ersten Verhältnisse die kleinere Zahl ebenfalls vorstehen, und die größere nachfolgen müsse.

Wäre folgendes Exempel gegeben: 5 Pflüge pflügen einen Acker in 15 Tagen, wie viel Pflüge braucht man, um diesen Acker in 20 Tagen zu pflügen. Hier würden im vierten Gliede weniger Pflüge gefunden werden müssen, weil man mehr Zeit zum Pflügen nimmt. Die Proportion würde also seyn

$$20\ T : 15\ T = 5\ P : \frac{15 \times 5}{20}\ P = 3\tfrac{1}{4}\ P$$

Für solche Brüche, wie hier $\frac{1}{4}$ Pflug, müßte man ein Ganzes nehmen. Man könnte da einen Pflug, der langsamer als die andern pflügte, für $\frac{1}{4}$ Pflug rechnen.

Wer

Wer diese Gründe bey Auflösung der umgekehrten Regel detri gebraucht, wird nicht leicht irren. Im Kästnerischen Lehrbuche heißt es von dieser Regel: " Die Rechenkunst kann keine Regeln geben, wenn sie anzuwenden ist, sondern man muß solches aus den Begriffen der Sachen selbst, wo man die Regel anbringen will, beurtheilen ".

Es ist dienlich, daß Anfänger nach dieser Methode zu rechnen angehalten, und in Beyspielen aus dem gemeinen Leben dergleichen bey Vergleichung der Waaren und ihrer Preise, der verschiedenen Maaße, Gewichte, Münzen und anderer mehr vorkommen, nicht in räthselhaften und unbrauchbaren Aufgaben geübt werden. Sie werden dadurch im Stande gesetzt, das Wesentliche der Proportion besser einzusehen. In der Algebra werde ich eine bequemere Manier zeigen, diese Aufgaben aufzulösen. Man muß sie ohnedas wissen, weil praktische Rechenmeister, auch Kaufleute und Wechsler sich derselben bedienen.

Die Regula Quinque, Septem, oder die Regel, wo 5, 7 und mehrere Zahlen gegeben sind, wird ebenfalls in den Anfangsgründen der Algebra abgehandelt werden. Jngleichen die höhstwichtige Kettenregel, welche die meisten übergehen, oder nur kurz berühren, wird daselbst vorkommen.

Anhang
Einer kurzen Geschichte der
Arithmetik.

Es ist schon oben angemerkt worden, daß man die Zifern, deren man sich heut zu Tage bedienet, für eine morgenländische Erfindung hält. Besonders wird den Arabern dieselbe zugeeignet. Doch macht Wallisius in operib. Arithm. C. 9. wahrscheinlich, daß die Judianer die ersten Erfinder seyen. Dem sey aber, wie ihm wolle; durch eine arabische Nation, die Saracenen, wurden sie mit andern Wissenschaften im zehenten Jahrhundert zuerst nach Spanien gebracht. Von da sind sie durch Gerbertum, der nachgehends ums Jahr 999 unter dem Namen Sylvester II zur påbstlichen Würde erhoben wurde, nach Frankreich gekommen. Aus den auch nur in diesen Anfangsgründen erlernten Rechnungen, kann man schon abnehmen, daß sie ungemeine Vortheile verschaffen. Und je mehr man sich mit Rechnungen beschäftiget, und über die Gründe der Operationen nachdenkt, je mehr wird man über-

überzeugt, daß die Vortheile, die sie verschaffen, nicht geringe sind. Andern Nationen, welche sich des Alphabets statt der Zifern bedienten, wurde daher das Rechnen sehr beschwerlich. Einige Völker, wie z. B. die Griechen und Hebräer brauchten das Alphabeth, so daß sie dessen ersten Buchstaben eins, den zweyten zwey u. s. w. gelten liessen Andere, wie z. E. die Lateiner machten aus dem Alphabeth eine Auswahl, und nahmen nur einige Buchstaben zu ihren Zahlzeichen. Den Unterschied, der bey verschiedenen Völkern im Gebrauche der Zifern sich befindet, erzählt Georgius Henischius in dem kleinern Tractat de Numeratione multiplici vetere & recentiori 1605. Auch findet man Nachricht davon bey dem Beveregio in seiner Arithm. Chronol. welche seinen Institution. Chronol. beygefügt ist.

Dieser Schwierigkeiten ungeachtet, hat schon vor ungefähr 2000 Jahren Euklides die Theorie der Arithmetik in seinem VII, VIII, und IX Buch der Elementorum so überzeugend vorgetragen, daß man allerdings den grossen Geist der Alten, die bey weniger Hülfsmitteln uns so viel vorgearbeitet haben, bewundern muß. Der Freyherr von Wolf in dem Unterrichte von den mathematischen Schriften sagt, daß Euklides in diesen dreyen Büchern die Arithmetik gründlich, aber nicht vollständig abgehandelt habe. Es fehlen allerdings Kenntnisse, die heut zu Tage ein Anfänger nothwen-

dig wissen muß. Gedachte drey Bücher sind in verschiedenen neuern und ältern Ausgaben weggelassen, worden. Hr. Prof. Clemm im mathematischen Lehrbuche meynt, daß dieses Verfahren, wo nicht ein Fehler, doch eine unzeitige Herablassung gegen die Anfänger sey, für welche man selbige zu schwer hielt. Wenn es jedem erlaubt ist, nach seinen eigenen Einsichten zu urtheilen, so würde ich sagen, Euklides arithmetische Bücher wären nicht so gut, als die geometrischen. Und da wir jetzt durch die Bemühungen einiger neuern grossen Männer die Arithmetik kürzer, und dabey doch vollständig und gründlich haben; so würde ich einen Anfänger eher an Kästner und Segner anweisen. Wer aber besonders in der Mathematik sich etwas mehr, als gewöhnlich umsehen will, der wird dann von selbst den Euklides nicht übergehen. So wie einer, der sich der deutschen Dichtkunst widmet, nebst einen Lessing und Wieland, auch wohl einen Opitz nachliesét.

Ausser dem Euklides hat unter den Alten Nicomachus 300 Jahre vor Christi Geburt zwey Bücher von der Arithmetik geschrieben, die aber nicht sonderlich zu rühmen sind. Aus ihm hat Anitius Manlius Severinus Boethius der im sechsten Jahrhunderte nach Christi Geburt eine Arithmeticam geschrieben, das meiste genommen. So schrieb auch Psellus, ein griechischer Schriftsteller des zehnten Jahrhunderts, eine Arithmetik, welche Wilhelm

Xylander ins lateinische übersetzt, und mit Erläuterungen im Jahre 1556 herausgegeben hat.

In den nachfolgenden Jahrhunderten erhielt die Arithmetik durch verschiedene Erfindungen beträchtlichen Zuwachs. Hieher gehören die Rechnung mit zehntheilichten Brüchen, welche Regiomontanus in Trigonometrischen Rechnungen, und Stevinus in der Geometrie einführte. Die neperianischen Stäblein, und noch eine andere Erfindung, die man nachher wird kennen lernen, hatte Johann Neper, Baron von Marchiston ein Schottländer, bekannt gemacht. Grosse Genies, wie Blaise Paskal, und der Baron Gottfried von Leibnitz erfanden Maschinen, wodurch man die Rechnungen ohne sonderliche Mühe verrichten könnte. Sie sind aber bey unserm Gebrauch der Zahlen doch entbehrlich. Da endlich die Algebra sammt der damit verbundenen allgemeinen Arithmetik, oder Rechnung mit Buchstaben durch neuere Mathematiker, mit den wichtigsten Zusätzen vermehrt wurde; so wurde die Arithmetik ebenfalls dadurch zu grösserer Vollkommenheit gebracht. Unter den aufgeklärtesten Nationen Europens erschienen arithmetische Schriften, welche theils die Regeln der Rechenkunst zum gemeinen Gebrauch des Lebens erklärten, theils die Gründe der Operationen anzeigten. Unter den letzten verdient Andreae Tacquet Theoria & praxis Arithmetices angeführt zu werden, weil er die Elementa Euclidis leichter erwiesen hat.

Die

Die ganze Mathematik hat dem Baron Christian von Wolf vieles zu danken. Mit ihr wurde also auch die demonstrative Arithmetik mehr in Deutschland und auch in auswärtigen Landen ausgebreitet. Der Leipziger Professor Hausen gab zwar seine vortrefliche Elementa Mathes. ans Licht. Man hielt sie aber für zu schwer, und sie sind daher bis jetzt manchem nicht einmal dem Namen nach bekannt. Da einmal Wolf der Mathematik den treflichen Dienst erwiesen hatte, daß er sie unter den Deutschen mehr als vorher ausgebreitet hatte; so suchten andere grosse Männer, und besonders der jetzige Hr. geh. Rath von Segner in Halle, da er noch Lehrer in Göttingen war, den Weg der Alten wieder hervor; und er gab ein Lehrbuch heraus, daß alle andere in Deutlichkeit, lichtvoller Ordnung, und Gründlichkeit übertraf. Es konnte aber die schlechteren nicht sogleich verdrängen. Nach diesem wurde durch einen Mann, worauf der Geist eines Leibnitzes ruhet (Und wer kennt hierdurch nicht Kästner?), ein neues Lehrbuch ans Licht gestellt, das eben so wenig als das segnerische eines Lobes bedarf. Und was konnte man anders von einem Schüler Hausens, als etwas Vollkommenes erwarten? Auch Karsten muß von jedem Kenner hochgeschätzt werden. Aus diesen Quellen haben die andern Schriftsteller meist geschöpft, und die häufigen Lehrbücher, welche im aufgeklärten Theile Deutschlands herausgegeben werden,

den, zeigen davon. Auch diese Anfangsgründe haben alles, was sie irgend Gutes enthalten, diesen erhabenen Männern zu danken.

Inhalt.

Einleitung von der Mathematik überhaupt. Seite 1.

I. Abschnitt. Allgemeiner Vortrag von den vier Hauptrechnungsarten in ganzen Zahlen S. 18.

II. Abschnitt. Von den vier Rechnungsarten in Brüchen. S. 57.

III. Abschnitt. Von den Quadrat- und Cubikzahlen. S. 83.

IV. Abschnitt. Von den Verhältnissen und Proportionen. S. 112.

Anhang einer kurzen Geschichte der Arithmetik. S. 138.

Anfangsgründe der Buchstabenrechnung und Algebra.

Einleitung.

§. 1.

Erkl. Die Buchstabenrechnung (Arithmetica litteralis, siue speciosa, siue uniuersalis) drückt die Größen durch allgemeine Zeichen aus, und lehrt, wie man aus solchen gegebenen Größen, die allgemein ausgedrückt sind, andere unbekannte finden könne. Sie wird deswegen die Buchstabenrechnung genannt, weil sie zu den allgemeinen Zeichen der Größen die lateinischen, besonders die kleinen Buchstaben gebraucht.

§. 2. Anm. Man muß die allgemeine oder Buchstabenrechnung wohl von der Algebra unterscheiden, wie sich dieses erst im folgenden deutlicher zeigen wird. Es kann einer die Buchstabenrechnung verstehen; er ist darum noch lange kein Algebraist. Erstere ist auch nicht so schwer, als letztere.“ Sollte aber doch jemand

furchtsam seyn (sagt Hr. Hofr. Kästner bey dieser Gelegenheit), so will ich ihm zehn bis zwölf Octavbände und Quartanten weisen, deren Verfasser auf verschiedenen Universitäten Deutschlandes wegen der darinne angebrachten Buchstabenrechnung für tiefsinnige Mathematiker, ja gar für Algebraisten gehalten werden; und ich will ihn auf meine Ehre versichern, daß ihn ein halbes Jahr in den Stand setzen soll, eben so tiefsinnige Werke zu schreiben, wenn er einen mittelmäßigen Fleiß nur bey so vielem Verstande und so vieler Aufmerksamkeit anwenden will, als ein Frauenzimmer braucht, das Tarock zu spielen.„ Wer über diese Materie mehr nachlesen will, der sehe eben dieses Schriftstellers Programma: Unde plures insint radices sectionibus angulum definientibus. Göttingen. Dieses will ich noch hier bemerken: wer einen glücklichen Fortgang in der Buchstabenrechnung und selbst in der Algebra machen will, der übergehe den folgenden Abschnitt nicht. Er studire ihn mit Bedacht, und die Schwierigkeiten werden wegfallen. Es deucht mir, daß diese Grundsätze von Hr. Euler in seiner vollständigen Anleitung zur Algebra nicht so überzeugend für Anfänger vorgetragen werden, als von den H. Segner und H. Kästner.

I. Abschnitt.

Von den entgegen gesetzten Größen.

§. 3. Erkl. Entgegen gesetzte Größen (Quantitates oppositae) heißen solche Größen von einer Art, deren eine die andere vermindert, wenn man sie zusammen betrachtet. Ein Beyspiel zu dieser Erklärung ist Vermögen und Schulden. Wenn jemand seine Einnahme und Ausgabe, oder seine zu bezahlende Schulden miteinander vergleichet, so wird das Vermögen durch die Schulden um so viel kleiner gemacht, als die Schulden betragen; und weil hier eins das andere vermindert, so sind sie entgegen gesetzt. Es giebt noch unendliche Gattungen von Größen, welche auf eben die Art miteinander verglichen werden, wie die Einnahme mit den Ausgaben, oder diese mit jener. Eine dieser entgegen gesetzten Größen, welche man will, nennt man positiv oder bejahend; die andere heißt alsdann in Beziehung auf die erstere negativ oder verneinend.

§. 4. Zus. Damit zwo Größen als positiv oder negativ betrachtet werden können; muß eine auf die andere sich also beziehen, und zwar so, daß sie sich einander vermindern. Es ist ganz willkührlich, welche man von beyden Größen als positiv ansehen will. Z. B. Man wollte die Schulden positiv oder bejahend nennen, so wäre das Vermögen verneinende

Schulden, denn es verminderte ja die Schulden. Und dieses trift überall zu, daß, wenn man die eine Gattung für positiv ansieht, die entgegen gesetzte als negativ kann betrachtet werden. So wird z. E. wenn der Aufgang positiv ist, der Niedergang negativ seyn, und umgekehrt. Wenn das in ein Gefäß einfließende Wasser als positiv betrachtet wird, so muß man das ausfließende für negativ halten. Ist im Gegentheil das ausfließende Wasser positiv, so muß das einfließende Wasser negativ genannt werden. Ist ein aufwärts steigender Körper positiv, so wird der herabfallende negativ, und so in allen Fällen.

§. 5. Zus. Aus dem angeführten ist klar, daß die negativen Größen, wirkliche, und wahrhaftige Größen sind, wie z. E. das Gehen gegen Morgen und das Gehen gegen Abend etwas wirkliches ist. In den geometrischen Wissenschaften kann dieses noch überzeugender dargethan werden. Man kann unter andern auch Boschovich de transformatione locorum geometric. welche Abhandlung den Section. conic. angehängt ist, nachsehen.

§. 6. Willkühr. Satz. Man bezeichnet die bejahenden Größen mit dem Zeichen + und die verneinenden mit —.

§. 7. Zus. Da entgegen gesetzte Größen einander vermindern; so kann man sie ansehen, als wenn eine von der andern abgezogen werden sollte, und

eben

eben eben deswegen werden sie mit + und — bezeichnet. Wenn z. E. jemand 5 fl. Vermögen, und 2 fl. Schulden hat, so verringern letztere das erstere. Es ist zusammen + 5 — 2 und also das übrige Vermögen + 3. An und vor sich wäre erlaubt (§. 4.) vor die Schulden das Zeichen + und vor das Vermögen das Zeichen — zu setzen. Man bleibt aber, um Verwirrung zu vermeiden, bey den eingeführten Gewohnheiten.

§. 8. Zus. Negative Größen heissen oft bey Schriftstellern Größen, die weniger als nichts. Dieser Ausdruck ist aus dem Vorhergehenden so zu erklären. Jede negative Grösse ist zwar mehr als nichts, weil sie eine wirkliche Grösse ist (§. 5). Aber wenn man zu einer positiven Grösse eine ihr gleiche negative setzt, so heben beyde einander auf, und geben o. Z. E. Wer 3 fl. Schulden hat, und 3 fl. baar Geld bekömmt, der muß damit die Schulden bezahlen, und hat alsdann nichts. Zuvor also, da er allein Schulden hatte, konnte man von ihm sagen, daß er weniger als nichts gehabt habe, weil er jetzt erst nichts hat, nachdem er 3 fl. bekommen hat. Eine negative Grösse ist also weniger als nichts in Beziehung auf die ihr entgegen gesetzte Größe, und des daraus entstehenden o. Wollte man dieses o als ein absolutes Nichts betrachten, so wäre der Ausdruck, wenn man negative Grössen weniger als nichts nennet, falsch. Wirklich sind Mathematikverständ-

ständige, die diese Beziehung nicht in Betracht gezogen haben, auf irrige Vorstellungen von den verneinenden Grössen geführt worden, wie Kästner bemerkt.

II. Abschnitt.

Die Rechnung mit entgegen gesetzten Größen und Buchstaben.

§. 9. Willkühr. Satz. Um eine Zahl überhaupt anzudeuten, gebrauche man einen Buchstaben. Die Veränderungen, die mit den Zahlen vorgenommen werden sollen, bezeichne man durch die nämlichen Zeichen, die schon in der gewöhnlichen Arithmetik §. 24 erklärt worden sind. Z. E. $a + b$ würde anzeigen, daß zu a noch b hinzu addirt werden sollte; und der Ausdruck würde jede mögliche Summe von zwoen Zahlen enthalten. Denn für a und b kann ja jede Zahl gesetzt werden. $a - b$ würde jede mögliche Differenz zwoer Zahlen vorstellen. $a \times b$ jedes mögliche Product, und $a : b$ oder $\frac{a}{b}$ alle Quotienten. Die Multiplication zeigt man auch dadurch an, daß man die beyden Factoren ohne Zeichen nebeneinander setzt. Z. B. ab, weil die Buchstaben keinen Werth von der Stelle erhalten, wie die Zifern. Ueberdieß wird bey der Buchstabenrech-

nung

nung im Anfange, wenn kein Zeichen vorhanden ist, allemal + verstanden, also wäre a so viel als + a. Sollte aber die Grösse im Anfang einer Reihe negativ seyn, so muß — davor stehen. Eine einzelne Grösse a ist so viel als 1 a und — b also so viel als — 1 b.

§. 10. Aufg. Ungleiche entgegen gesetzte Größen zu addiren.

Aufl. Man ziehe die kleinere von der größern ab, und setze vor den Rest das Zeichen der größern.

Z. E. + 6 und — 5 sind zusammen = + 1.
+ 4 und — 7 sind zusammen = — 3.

Wären Größen allgemein, oder in Buchstaben ausgedrückt, so würden nach dieser Regel folgende Exempeln eben so leicht zu addiren seyn.

$$
\begin{array}{rrrr}
3a & -4b & +4f & +g \\
2a & -3b & -2f & -5g \\
\hline
5a & -7b & +2f & -4g
\end{array}
$$

*

$$
\begin{array}{rrrr}
5a & +b & -3c & -4d \\
-2a & +8b & -c & +4d \\
\hline
3a & +9b & -4c &
\end{array}
$$

Bew. Entweder haben die Größen, welche zusammen

sammen addirt werden sollen, einerley Zeichen oder nicht. Im ersten Falle ist offenbar, daß die Summe das nämliche Zeichen bekomme, das die Größen selbst haben. Sind aber die Zeichen der zu addirenden Zahlen verschieden; so sind sie entgegen gesetzt, und die eine hebt so viel, als sie beträgt, in der andern auf (§. 7.). Das, was von der größern übrig bleibt, ist die Summe beyder Größen.

§. 11. Zus. Kommen verschiedene positive und negative Größen vor, die einerley Buchstaben haben, so ist es bequem, alle, die zusammen gehören, und einerley Zeichen haben, zusammen zu addiren, und alsdann zu sehen, was die Summe beyder giebt. Z. E. Wenn man von $5a - 3b - 2a$ sollten $7b - 7a + a$ subtrahirt werden, so wäre;

$$\begin{array}{r} 7b + 6a \\ -3b - 9a \\ \hline 4b - 3a \end{array}$$

§. 12. Zus. Wenn man verschiedene Buchstaben, das heißt Größen, die nicht von einer Art sind, zu addiren hat, so werden die Buchstaben nur mit ihren Zeichen zusammen gesetzt. Z. E.

$$\begin{array}{l} 2a - 3b - 4g \\ 3a + 2d - 4f \\ \hline 5a - 3b + 2d - 4g - 4f. \end{array}$$

Alle

Alle diese Beyspiele können erläutert werden, wenn man statt der Buchstaben genannte Zahlen setzt. Ich will hier ein Beyspiel hersetzen; im folgenden wird man es leicht selbst thun können.

$$
\begin{array}{l}
8\ \text{fl} + 4\ \text{gr} - 7\ \text{kr} + 2\ \text{pf.} \\
3\ \text{fl} - 11\ \text{gr} - 1\ \text{kr} + 5\ \text{pf.} \\
\hline
11\ \text{fl} - 7\ \text{gr} - 8\ \text{kr} + 7\ \text{pf.}
\end{array}
$$

§. 13. Aufg. Größen, die mit einerley, oder verschiedenen Zeichen geschrieben sind, voneinander zu subtrahiren.

Aufl. Man verändere alle Zeichen der Zahl, die subtrahirt werden soll, in die entgegen gesetzte, und addire. Die herauskommende Zahl wird die Differenz seyn. Z. E.

$$
\begin{array}{rrrr}
5 & -8 & +3 & -2 \\
3 & -3 & -5 & +4 \\
- & + & + & - \\
\hline
2 & -5 & +8 & -6
\end{array}
$$

Die Zeichen in der dritten Reihe sind die, welche in die entgegen gesetzten verwandelt worden; um nach der gegeben Regel addiren zu können. Dieses ist auch fürs folgende zu merken.

Bew. Die Grösse, welche subtrahirt werden soll, hat entweder das Zeichen + oder –. Im ersten Falle ist klar, daß, wenn von + 5 die Zahl

+ 3 abgezogen werden soll, dieses so viel sey, als wenn die entgegen gesetzte − 3 hinzu addirt wird. Denn es soll ja von + 5 die Zahl 3 weggenommen werden, und die entgegen gesetzte − 3 nimmt so viel weg. Also muß vermöge des unmittelbaren Gegensatzes, die Zahl, welche subtrahirt werden soll, und das Zeichen − hat, + bekommen.

§. 14. Anm. Wenn man zwo Zahlen von einander subtrahirt, so sucht man den Unterschied zwischen beyden. Wenn also z. B. einer 3 fl. Vermögen oder + 3 und der andere 5 fl. Schulden oder − 5 hat, und man fragt nach dem Unterschied zwischen beyden so wird der erste unstreitig + 8 haben, wenn man auf den Unterschied zwischen beiden siehet. Denn da er 3 fl. Vermögen hat, und der andere 5 fl. Schulden, so würde der andere erst nichts haben; wenn er 5 fl. bekömme, seine Schulden zu bezahlen. Der Unterschied zwischen beyden ist also wirklich 8 fl, um die sich der erste reicher schätzen kann. Auf diese Art lassen sich diese Lehren erläutern.

§. 15. Zus. Wenn eine Größe aus zweyen Stücken bestehet, und das zweyte von dem ersten subtrahirt ist, so wird die Subtraction so verrichtet, daß man das erste Stück subtrahirt, das andere wieder addirt. Z. E.

$$15 - (8 - 4) \text{ ist} = 15 - 8 + 4 = 11.$$

Denn

Denn wenn man das erste Stück 8 allein abziehet, so hat man zu viel subtrahirt, weil man ja das erste 8 weniger dem zweyten 4 abziehen sollte. Man muß also das zweyte (in diesem Falle 4), das man zu viel abgezogen hat, wieder hinzu addiren.

Es ist also auch $12 - (7 - 20) = 12 - 7 + 20 = 25$.

Und $a - (b - d) = a - b + d$.

§. 16. Lehrs. Wenn zween Factores einerley Zeichen haben, es sey nun + oder −, so bekömmt das Product auch +. Haben sie aber verschiedene Zeichen, so bekömmt das Product −.

Bew. Die Einheit verhält sich zu dem einen Factor, wie der andere Factor zum Product; wie schon in der Arithmetik gezeigt worden. Es ist nun erlaubt, die Einheit als positiv anzunehmen. Denn dadurch werden die positiven Zahlen das Vielfache dieser positiven Einheit, und die negativen Zahlen das Vielfache des Entgegengesetzten. Nähme man die Einheit negativ an, so wären negative Zahlen das Vielfache dieser Einheit, und positive das Vielfache des Entgegengesetzten. Da nun die Einheit auf die eine oder andere Art angenommen werden muß, und es willkührlich ist, wie man sie annimmt (§. 4.); so ist es auch verstattet, selbige positiv anzunehmen. Nun können folgende vier Fälle bey der Multiplication statt finden.

$$1 : +4 = +5 : +20$$
$$1 : +4 = -5 : -20$$
$$1 : -4 = +5 : -20$$
$$1 : -4 = -5 : +20$$

In den beyden ersten Fällen verhält sich die Einheit zu dem einen Factor, wie der andere Factor zum Product; oder welches gleichviel ist, sie ist so oft in dem einen Factor enthalten, als der andere im Product; und folglich ist das Product richtig bezeichnet. Im dritten Falle ist die Einheit nicht in dem einen Factor enthalten; sondern die Entgegengesetzte, nämlich — 1; also kann auch im Product nicht der andere Factor + 5 enthalten seyn, sondern das Entgegengesetzte, und das Product aus 20 hat derohalben das Entgegengesetzte Zeichen des Factors + 5 und muß also — 20 werden. Auf die nämliche Art erhellet die Wahrheit des vierten Falles.

Eine Erklärung und weitere Bestättigung dieser Lehre kann das noch abgeben, was Hr. Euler bemerkt. Wenn Zahlen mit verschiedenen Zeichen multiplicirt werden, z. E. — 5 mit + 4, so hieße das, wenn es genannte Zahlen wären, 5 fl. Schulden viermal nehmen, das Product muß also 20 fl. Schulden, oder — 20 werden. Wenn derohalben — 5 mit — 4 zu multipliciren ist, so kann dieß nicht das nämliche geben, denn — 5 mit + 4 multiplicirt giebt das Product — 20. Da im letzten Falle, wo — 5

mit

mit —4 multiplicirt wird, der Factor —4 das entgegen gesetzte Zeichen vom vorigen Factor hat, so muß auch das Product das entgegen gesetzte Zeichen vom vorigen Product haben, und + 20 werden. Man kann übrigens Segners Vorlesungen über die Arithm. und Geometr. nachsehen.

§. 17. Zus. In Buchstaben ist, wenn $a-b+c$ durch d multiplicirt werden soll, das Product $ad-bd+cd$. Zeigt man nur die Multiplication an, und multiplicirt nicht wirklich, so muß man die erste Größe in Klammern einschliessen, damit man sehen könne, daß das Ganze multiplicirt werden soll. Z. E. $(a-b+c)d$. Folgendes ist eben so leicht zu multipliciren.

$$\begin{array}{r} a-b+c \\ d-f \\ \hline ad-bd+cd \\ -af+bf-fc \\ \hline ad-bd+cd-af+bf-fc. \end{array}$$

§. 18. Zus. Wäre a durch a zu multipliciren, so ist das Product aa, oder a^2, denn es wird ja hier eine Größe a durch sich selbst multiplicirt, und folglich muß das Quadrat der Größe entstehen. Also ist $aaa=a^3$; $aaaa=a^4$. Die Zahl rechter Hand ist der Exponent, wie schon aus der Arithm. bekannt

ist

ist, und zeigt an, wie vielmal ein Factor mit sich selbst multiplicirt ist; und es muß a^3 sehr wohl von $3a$ unterschieden werden.

§. 19. Zus. Es werde $a+b$ mit sich selbst multiplicirt, so entstehet das Quadrat einer zweytheilichten Größe.

$$\begin{array}{l} a + b \\ a + b \\ \hline aa + ab \\ \quad + ab + bb \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

Hieraus siehet man allgemein, daß das Quadrat einer zweytheilichten Größe, aus dem Quadrate des ersten Theils, aus dem doppelten Producte des ersten Theils mit dem andern multiplicirt, und aus dem Quadrate des andern Theils bestehe.

Es werde eine dreytheilichte Größe mit sich selbst multiplicirt

$$\begin{array}{l} a + b + d \\ a + b + d \\ \hline a^2 + ab + ad \\ \quad + ab + b^2 + bd \\ \qquad + ad + bd + d^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 + 2ad + 2bd + d^2 \end{array}$$

$2ad + 2bd$ ist aber $= 2(a+b)d$. Denn hierdurch ist nur die Multiplication angezeigt, und wenn man wirklich multiplicirt, so kömmt wieder das vorige heraus. Das Quadrat einer drentheilichten Wurzel ist also $a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)d + d^2$. Und darans zeigt sich allgemein, daß in der Arithmetik die drentheilichte Wurzel gefunden wird, wenn man nach den daselbst gegebenen Vorschriften verfährt (Arithm. §. 104.).

Eben dieß ist auch vom Würfel anzumerken. Man multiplicire das Quadrat einer zweytheilichten Größe durch die Wurzel, so entstehet der Würfel dieser Wurzel. Z. E.

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2aab + abb \qquad\qquad \\ aab + 2abb + b^3 \\ \hline a^3 + 3aab + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

Hier findet man wieder allgemein, was die Arithm. von dem Würfel einer zweytheilichten Wurzel gelehret hat (Arithm. §. 114.).

§. 20. Zus. $(a+b)(a+b) = (a+b)^2$ Das heißt, wenn $a+b$ durch sich multiplicirt wird, so erlangt man das Quadrat davon. Es ist deswegen verstattet, immer einen Ausdruck für den andern zu setzen, weil sie einander gleich sind. Es werde

multi=

multiplicirt (a — b) (a — b), so entstehet $(a-b)^2$. Es ist aber, wenn a — b mit a — b multiplicirt wird

$$\begin{array}{l} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab \\ \quad - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

Folglich wenn der zweyte Theil der Wurzel negativ ist; so ist auch das zweyte Glied im Quadrat negativ.

Multiplicirt man a + b mit a — b; so entstehet $a^2 - b^2$. Denn es ist

$$\begin{array}{l} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad - ab - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \end{array}$$

Man kann also in Rechnungen für (a + b) (a — b) allemal $a^2 - b^2$ setzen, und umgekehrt. Denn wenn man das erste wirklich multiplicirt; so entstehet das letztere. Diese Sätze sind wohl zu merken. Man hat oft in der Buchstabenrechnung grossen

Vor-

Vortheile daraus, wenn man ein Product, wie $a^2 - b^2$, in seine Factores zerlegt. Es setzt aber eine Fertigkeit voraus, die Factores geschwinde zu entdecken. Auch dienen dergleichen Operationen dazu, allgemeine Lehrsätze zu erfinden. Z. E. Der gegenwärtige hieße in Worten ausgedrückt: Wenn man die Summe zwoer Zahlen mit ihrer Differenz multiplicirt, so entstehet die Differenz der Quadrate der Zahlen.

§. 21. Aufg. Größen, welche entgegen gesetzte Zeichen haben, in einander zu dividiren.

Aufl. und Bew. In Ansehung der Zeichen ist die nämliche Regel, wie in der Multiplication zu beobachten. Einerley Zeichen geben hier auch + verschiedene aber —. Denn da sich der Divisor zum Dividendus verhält, wie die Einheit zum Quotienten; so lassen sich die nämlichen Schlüsse in Ansehung der Zeichen anbringen, die bey der Multiplication da gewesen sind. Im übrigen werden die Zahlen auf die gewöhnliche Art dividirt.

Z. E. $\frac{+8}{-2} = -4. \quad \frac{-12}{-3} = +4.$

Man sieht hier auch, daß, wenn der Divisor mit dem Quotienten multiplicirt wird, so kömmt der Dividendus mit seinem vorgesetzten Zeichen wieder heraus.

Sind in allgemeinen Grössen einerley Buchstaben im Divisor und Dividendus enthalten; so werden diese ausgestrichen, und, was alsdann übrig bleibt, ist der Quotient. Z. E. $\frac{ab}{a} = b$. Denn a ist in a einmal enthalten, und folglich $\frac{a}{a} = 1$ und $1\ b = b$. So auch $\frac{abc}{ab} = c$.

Bestehet der Divisor und Dividendus aus verschiedenen Buchstaben, so wird die Division nur angezeigt. Z. E. $\frac{a}{b}$. Eine andere Art diesen Quotienten zu bestimmen, kömmt unten vor.

Wenn der Dividendus aus mehrern Gliedern bestehet, der Divisor nur aus einem; so wird jedes Glied des Dividendus dividirt. Der Quotient mit dem Divisor multiplicirt, und das Product vom Dividendus abgezogen. Z. E.

Divisor	Dividendus	Quotient
a	$ab - ad + ag$	$b - d + g$
	$ab - ad + ag$	
	$- \quad + \quad -$	
	$0 \quad 0 \quad 0$	

Die untersten Zeichen gelten für die Subtraction.

Wenn

Wenn der Divisor nicht einzeln ist, so wird das erste Glied des Dividendus mit dem ersten des Divisors dividirt, und der ganze Divisor in den Quotienten multiplicirt. Ueberhaupt verfährt man hier auf die Art, wie in der Division mit Zahlen.

Exempel. $a+b \mid aa - bb \mid a - b$

$$\begin{array}{r} aa + ab \\ \underline{- \quad -} \\ -ab - bb \\ -ab - bb \\ \underline{+ \quad +} \\ 0 \end{array}$$

Noch ein Beyspiel.

$a - b - c \mid aa - bb - 2ac + cc \mid a + b - c$

$$\begin{array}{r} aa - ab - ac \\ \hline +ab - bb - ac \\ ab - bb - bc \\ \hline -ac + bc + cc \\ -ac + bc + cc \\ \hline 0 \end{array}$$

Man muß allemal wohl in Acht nehmen, daß, wenn man subtrahirt, die Zeichen in entgegengesetzte verwandelt, und addirt werden.

III. Abschnitt.

Von der Buchstabenrechnung in Brüchen.

§. 22. Lehrs. Alle Veränderungen, die mit Brüchen vorgenommen werden, geschehen nach den Regeln, die schon die Arithm. im II Abschn. gelehret hat.

Bew. Denn die daselbst gegebenen Beweise sind allgemeine. Man betrachtet nämlich in der Arithmetik die Zahlen nur als Zahlen überhaupt, nicht als bestimmte Zahlen. In jedem der vorhergehenden arithmetischen Beweise könnten andere Zahlen gebraucht werden, und der Lehrsatz würde doch durch sie bewiesen werden. Die Zahlen sind daselbst nicht pure Exempel, sondern Zeichen, vermittelst deren man bequem andeutet, daß etwas mit den Zahlen geschehen soll, was mit jeden andern ebenfalls geschehen würde.

Ich will also nur noch die Beyspiele hersetzen. Brüche unter einerley Benennung zu bringen.

$$\frac{a}{b} \quad \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \quad \frac{bc}{bd}$$

Brüche zu addiren; z. B. die vorigen.

$$\frac{ad + bc}{bd}$$

Brüche

Brüche zu subtrahiren.

$$\frac{ad - bc}{bd}$$

Brüche zu multipliciren. Es geschiehet ebenfalls nach den in der Arithmetik gegebenen Regeln. Nur muß man in Ansehung der Zeichen bemerken, daß, wenn — sich auf den ganzen Bruch beziehet, so stehet es zur Seite des Bruchs. Z. E. $-\frac{a}{b}$, oder bey dem Zähler und Nenner $\frac{-a}{-b}$. Beziehet es sich aber allein auf den Zähler, oder allein auf den Nenner; so stehet es vor jedem, auf den sich das Zeichen beziehet. Z. E. $\frac{-a}{b}$ Hier hat der Zähler allein —; $\frac{a}{-b}$ Hier hat der Nenner allein das Zeichen —.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{bd}$$

*

$$\frac{a}{-f} \times \frac{-g}{h} = \frac{-ag}{-fh.}$$

Brüche zu dividiren

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

*

$$\frac{f}{g} \div \frac{-h}{m} = \frac{f}{g} \times \frac{m}{-h} = \frac{mf}{-gh}$$

IV. Abschnitt.

Von den Potenzen.

§. 23. Erklär. Was eine Potenz, Dignität, oder Potestät sey, ist in der Arithmetik §. 92 erkläret worden. Jngleichen weis man schon, was der Exponent ist. Es würde also a^5 heißen, daß a fünfmal mit sich selbst multiplicirt werden sollte, oder aaaaa. Es wäre a die Wurzel, und 5 der Exponent. Auch ist bekannt, daß, wenn man anzeigen wollte, die Wurzel sollte aus einer gewissen Dignität gezogen werden, das Wurzelzeichen vor die Grösse geschrieben, und der Exponent der Dignität in selbiges gesetzt wird. Z. E. $\sqrt[5]{a}$ würde heissen, man sollte die Wurzel aus der fünften Dignität von a ziehen. Jst in dem Wurzelzeichen kein Exponent, so bedeutet es bekanntermassen, daß die Quadratwurzel ausgezogen werden solle z. E. $\sqrt{b}$.

Auf die allgemeinste Art könnte man eine Potenz durch folgenden Ausdruck vorstellen a^m. Denn für a liesse sich jede mögliche Zahl setzen, und m kann ebenfalls jeden Exponenten anzeigen. Die Wurzel aus a auf die Potenz m erhoben, würde seyn $\sqrt[m]{a}$.

§. 24. Lehrs. Wenn die Potenzen einerley Buchstaben, und überdas einerley Exponenten haben; so

kann

kann man sie zusammen addiren, und voneinander subtrahiren. Ausserdem kann nur ihre Addition, oder Subtraction durch das dazwischen gesetzte Zeichen angezeigt werden.

Bew. Denn im ersten Falle sind es homogene oder gleichnahmige Größen, und nur diese können wirklich addirt und subtrahirt werden.

Exempel. $2a^3 + 5a^3 = 8a^3$. Aber $4b^2$ zu $3d^3$ addirt, ist $4b^2 + 3d^3$. Eben so a^3 zu a^2 addirt, ist $a^3 + a^2$; $5a^3 - 2a^3 = 3a^3$. Aber $7b^4 - 5b^3$ läßt sich nicht wirklich subtrahiren, und der Ausdruck bleibt so stehen. Auch im folgenden kann nur die Subtraction angezeigt werden $a^3 - b^3$.

Allgemein ist $a^m + 3a^m = 4a^m$. Aber $a^m + b^m$ bleibt so stehen. Ebenfalls $a^m \times a^n$ ist nicht zu verändern. Hingegen $5a^m - 2a^m = 3a^m$. Wiederum $a^m - a^n$ kann nicht wirklich subtrahirt werden.

§. 25. Lehrs. Potenzen von einerley Wurzel werden miteinander multiplicirt, wenn man die Exponenten der Factoren zusammen addirt. Das Product der Potenzen ist also die Wurzel, welche zum Exponenten die Summe der Exponenten der gegebenen Potenzen bekömmt.

Z. E. Es sey a^2 durch a^3 zu multipliciren; so

dire man beyde Exponenten $3 + 2 = 5$; und das Product wird $= a^5$.

Bew. Da der Exponent die Anzahl der Factoren in der Potenz anzeigt, z. E. $a^3 = aaa$, und $a^2 = aa$; so bekömmt das Product beider Potenzen so viel Factoren, als beide Exponenten zusammen haben; z. E. $a^3 \times a^2 = aaa \times aa = aaaaa = a^5$. Deswegen ist das Product eine Potenz, deren Exponent die Summe der Exponenten der Factoren ist.

Allgemein ist $a^m \times a^n = a^{m+n}$

§. 26. Lehrs. Es werden Potenzen von einerley Wurzel miteinander dividirt; wenn man ihre Exponenten subtrahirt. Der Quotient ist also die Wurzel, welche zum Exponenten die Differenz beider Exponenten der gegebenen Potenzen hat.

Z. E. $a^5 : a^2 = a^{5-2} = a^3$.

Bew. $a^5 = aaaaa$ und $a^2 = aa$. Folglich $\frac{a^5}{a^2} = \frac{aaaaa}{aa}$, und da heben sich im Dividend so viel Factoren auf, als der Divisor hat, und im Quotienten bleiben so viele Factoren stehen, so viel der Dividendus mehr als der Divisor hat; folglich ist der Quotient eine Potenz, deren Exponent herauskömmt, wenn der Exponent des Divisors vom Exponenten des Dividendus abgezogen wird.

Es ist also $b^4 : b^3 = b^1$, oder weil 1 anzeigt, daß nur ein Factor vorhanden, so kann man man auch dafür schlechthin b setzen.

§. 27. Zus. Wenn des Divisors Exponent grösser ist, als des Dividendus, so wird der Exponent des Quotienten negativ. Z. E. es sey a^2 zu dividiren durch a^5, so müßte nach dem Lehrsatze §. 26 der Exponent des Divisors vom Exponenten des Dividendus abgezogen werden. Es ist aber $2 - 5 = -3$. Denn wenn man 5 von 2 abziehet, so heben sich von 5 zwey auf, und es bleiben noch 3 übrig, die subtrahirt werden müßten. Um dieses anzuzeigen wird das Zeichen — davor gesetzt. Folglich ist $a^2 ; a^5 = a^{2-5} = a^{-3}$.

Aber es ist auch $a^2 ; a^5 = \frac{a^2}{a^5} = \frac{aa}{aaaaa}$ — $= \frac{1}{aaa}$ oder $\frac{1}{a^3}$. Hieraus erhellet, daß $\frac{1}{a^3}$ und a^{-3} gleichgültige Ausdrücke sind, deren einer immer stat des andern gesetzt werden kann. Aus gleichem Grunde ist $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ oder in Zahlen $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$; und überhaupt $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$. Diese Ausdrücke müssen sich Anfänger geläufig machen, wenn sie in der Analysis Fortgang zu machen gedenken.

§. 28. Zus. Es sey a^2 durch a^2 zu dividiren; so ist $\frac{a^2}{a^2} = 1$. Wenn aber Potestäten miteinander zu dividiren sind, so muß man ihre Exponenten von einander subtrahiren (§. 26.). Es ist also $\frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0$; und da nun vorher $\frac{a^2}{a^2} = 1$ gefunden worden, so folgt daraus, daß $a^0 = 1$. Da a jede Größe bedeutet, so schließt man daraus daß eine Größe, die auf die Potenz 0 erhoben worden, oder die zum Exponenten 0 hat, = 1 sey. Z. E. $32^0 = 1$.

§. 29. Aufg. Zusammengesetzte Größen, wo der Dividendus und Divisor Potenzen enthalten, miteinander zu dividiren.

Aufl. I. Man ordne den Divisor und Dividendus nach einerley Buchstaben, so daß in beyden die höhste, oder niedrigste Potenz voranstehe, und die zunächst stehenden Potenzen gleich darauf folgen. II. Man dividire des Dividendus erstes Glied durch das erste Glied des Divisors nach der §. 26 gegebenen Vorschrift. Sind überdas noch Zahlen neben den Potenzen; so dividire man sie auf die gewöhnliche Art. III. Diesen ersten Theil des erhaltenen Quotienten multiplicire man mit dem ganzen Divisor, und ziehe das Product ab. IV. Man nehme

zu dem Rest noch ein Glied des Dividendus hinzu, und fahre nach den gegebenen Regeln fort zu dividiren, so daß allemal der neue Theil des Quotienten mit dem ganzen Divisor multiplicirt, und das Product vom Dividendus subtrahirt werde, bis endlich alle Glieder des Dividendus zu dem Rest gesetzt sind, und keines mehr übrig ist. — Die Regeln werden durch folgendes Beyspiel deutlich werden. Divisor und Dividendus sind hier nach den Buchstaben a geordnet. Die höhste Potenz von a, die im Divisor und Dividendus enthalten ist; stehet in beyden voran; und die nächst kleinern folgen unmittelbar aufeinander.

Exempel.

Di-

Divisor	Dividendus	Quotient.
$4a^3 + 2a^2b$	$12a^7 + 26a^6b + 10a^5b^2 - 24a^5d - 12a^4bd$	$3a^4 + 5a^3b - 6a^2d$
	$12a^7 + 6a^6b$	
	$+ 20a^6b + 10a^5b^2$	
	$20a^6b + 10a^5b^2$	
	$- 24a^5d - 12a^4bd$	
	$- 24a^5d - 12a^4bd$	
	0	

§. 30. Zus. Wenn die Division nicht den Quotienten ganz verschaft, sondern nach verrichteter Operation noch etwas übrig bleibt; so läßt sich der Quotient durch Näherung suchen. Dieses ist aber in allen Fällen nicht nöthig. Es sey z. E. 1 durch 1 — x zu dividiren, so bekommt man den Quotienten nur durch Näherung.

Divisor	Dividendus	Quotient
$1 - x$	1	$1 + x + x^2$ u. s. w.
	$1 - x$	
	x	
	$x - x^2$	
	x^2 u. s. w.	

Hieraus läßt sich leicht abnehmen, wie in dergleichen Fällen zu verfahren sey. Doch wollen wir noch folgendes Beyspiel betrachten.

Divisor	Dividendus	Quotient.
$1 + x$	1	$1 - x + x^2 - x^3$ u. s. w.
	$1 + x$	
	$-x$	
	$-x - x^2$	
	x^2	
	$x^2 + x^3$	
	$-x^3$ u. s. f.	

Hier

Hier nimmt man wahr, daß die Zeichen der Reste und der Glieder des Quotienten miteinander abwechseln, und man kann den Quotienten in mehrern Gliedern angeben, ohne wirklich zu dividiren. Dieses Exempel verdient aber noch, deswegen eine Erläuterung, weil große Mathematikverständige dabey Schwierigkeit gefunden haben. Im vorhergehenden ist 1 durch $1 + x$ dividirt worden, und da kamen im Quotienten die Glieder $1 - x + x^2 - x^3 + x^4$ u. s. w. ohne Ende zu stehen. Es wäre also $\frac{1}{1+x}$ diesem Quotienten gleich. Wenn nun für x die Zahl 1 gesetzt wird; so entstünde daher $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1$ u. s. w. $= 0 + 0$. Und weil hier jedes nachfolgende Glied mit dem vorhergehenden 0 macht, so schloß man übereilt daraus: eine unendliche Menge von 0 wäre $= \frac{1}{2}$. Guido Grandi, ein geschickter Mathematiker fand in diesem Divisionsexempel gar ein Gleichniß der Schöpfung aus Nichts. Selbst der große Leibnitz versuchte diese Schwierigkeit aus dem Wege zu räumen. Es ist aber nach Kästners Algeb. leicht, diesen scheinbaren Widerspruch zu heben. Nämlich man müßte ohne Ende fortrechnen, wenn man den vollkommenen Quotienten darstellen wollte. Hört man bey einem Glied auf, so hat man den vollständigen Quotienten nicht, sondern es bleibt noch ein Glied übrig, das dividiet werden müßte. Es muß dieses Glied derohalben mit dem darunter

geſetz-

gesetzten Divisor noch zu dem Quotienten als eine Ergänzung gesetzt werden. Eben so z. B. als wenn man 13 durch 4 dividirt; der Quotient würde 3 seyn, und noch über das $\frac{1}{4}$. Also ist der Quotient vollständig, wenn man bey einem negativen Glied aufhört zu dividiren $1 - x + x^2 - \frac{x^3}{1+x}$, und setzt man für x die Zahl 1, so ist er $1 - 1 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Hört man bey einem positiven Glied auf; so ist der Quotient $1 - x + x^2 - x^3 + \frac{x^4}{1+x}$. Oder wenn man 1 statt x setzt $1 - 1 + 1 - 1 + \frac{1}{2}$. Und es ist also überall $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Und folglich nicht $\frac{1}{2} = 0 + 0 + 0$ rc.

§. 31. Lehrs. Es lassen sich Potenzen auf andere höhere Potenzen, (oder wie man es insgemein auszudrücken pflegt) zu höhern Graden erheben, wenn man die Exponenten der verlangten Potenzen multiplicirt. Z. E. wenn a^3 auf die vierte Potenz erhoben werden sollte, so müßte der Exponent 3 mit dem von der verlangten vierten Potenz multiplicirt werden; und es wäre also $a^{3 \times 4} = a^{12} =$ der verlangten vierten Potenz von a^3.

Bew. Wenn a^3 auf die vierte Potenz erhoben werden sollte; so müßte a^3 viermal mit sich selbst multiplicirt werden. Nun ist $a^3 + a^3 + a^3 + a^3 = a^{3+3+3+3}$ (§. 25.)

(§. 25.). Eine Zahl aber etlichemal mit sich selbst addiren, heißt multipliciren. Folglich darf man nur den Exponenten der Potenz mit dem Exponenten der verlangten Potenz multipliciren; so erhält man die gesuchte Potenz.

§. 32. Zus. I. Im allgemeinen Ausdruck entstehet daher x^{mn}; wenn x^m auf die Potenz n erhoben werden soll. II. Zusammen gesetzte Potenzen wie $a^2 b^3$ werden auf die nämliche Art behandelt. Wenn diese auf die vierte Potenz sollten erhoben werden; so wären selbige $a^8 b^{12}$. Und allgemein, wenn $x^m y^n$ auf die Potenz p erhoben werden sollten, so wäre sie $x^{mp} y^{np}$ III. Auch bey Größen, welche negative Exponenten haben, läßt sich diese Regel anwenden. Z. E. a^{-2} auf die dritte Potenz erhoben ist a^{-6}. Man siehet dieses leicht aus §. 27 ein. Denn $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ und folglich $\frac{1}{a^2}$ auf die dritte Potenz erhoben $= \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^{2+2+2}}$ (§. 25.) $= \frac{1}{a^{2 \times 3}}$ $= \frac{1}{a^6} = a^{-6}$ (§. 27.)

V. Abschnitt.

Die Rechnung mit Wurzelgrößen.

§. 33. Lehrs. Wenn man die Wurzel aus einer Potenz ziehen soll; so darf man nur den Exponenten,

nenten der Potenz durch den Exponenten der Wurzel dividiren.

Z. B. Man verlangt die Cubikwurzel aus a^{12} so wäre der Exponent der Wurzel 3. Denn $\sqrt[3]{a^{12}}$ bedeutet, daß die Cubikwurzel aus a^{12} gezogen werden solle. Man dividire nun den Exponenten der Potenz durch den Exponenten der Wurzel, so ist $a^{\frac{12}{3}} = a^4$; und dieses wäre die verlangte Wurzel.

Bew. Da die dritte Potenz von a^4 entstehet, wenn man den Exponenten 4 mit dem Exponenten der verlangten Dignität 3 multiplicirt; so folgt auch, daß umgekehrt die Cubikwurzel aus a^{12} erhalten wird, wenn man den Exponenten 12 mit 3 dividirt (§. 26.).

§. 34. Zus. Da kein Exponent in das Zeichen der Wurzel eines Quadrats gesetzt wird, so bedeutet $\sqrt{a^2}$ so viel als $\sqrt[2]{a^2}$, und folglich wäre die Wurzel aus $\sqrt{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a$ und $\sqrt{a} = \sqrt{a^1} = a^{\frac{1}{2}}$. Dieses zeigt, daß es Potenzen gebe, deren Exponenten Brüche sind. Um eine Wurzel aus einer Potenz auszudrücken, darf man also überall nach dem Lehrsatz verfahren. $\sqrt[5]{a^3}$ wäre $a^{\frac{3}{5}}$, und $\sqrt[4]{a^5 b^3} = a^{\frac{5}{4}} b^{\frac{3}{4}}$ und überhaupt $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$. Auch bey negativen Exponenten wird solchergestalt verfahren, z. E. $\sqrt[3]{a^{-2}} = a^{-\frac{2}{3}}$.

§. 35. Zus. Es geschieht manchmal, daß man in einer zusammengesetzten Größe, aus einer, aus mehrern oder auch allen Potenzen die Wurzel wirklich ausziehen kann. Z. E. $\sqrt[3]{a^3 b^2} = a^{\frac{3}{3}} b^{\frac{2}{3}} = ab^{\frac{2}{3}}$. Oder wenn man vor die letzte das Wurzelzeichen wieder vorsetzt, $a\sqrt[3]{b^2}$. So ist $\sqrt{a^2 b^6} = a^{\frac{2}{2}} b^{\frac{6}{2}} = ab^3$. Wären hinter dem Wurzelzeichen Zahlen, so kann man gemeiniglich aus einem Theil die Wurzel ausziehen. Man muß aber die Zahl in Factoren so zu zerfällen suchen, daß eine ein vollkommenes Quadrat, Cubus u. s. w. wird, nachdem man eine Quadrat- Cubikwurzel u. s. w. ausziehen will. Z. E. $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3}$. Aus 16 läßt sich hier die Quadratwurzel ziehen, und $\sqrt{48}$ ist $= 4\sqrt{3}$. Eben so ist $\sqrt[3]{108} = 27 \times 4$. Aus 27 läßt sich wieder die Cubikwurzel ziehen, und es entstehet daher $3\sqrt[3]{4}$.

§. 36. Aufg. Wurzelgrößen zu einer Benennung zu bringen.

Aufl. Man drücke die Wurzelgröße wie eine Potenz aus, deren Exponent ein Bruch ist. Z. E. statt $\sqrt[3]{a^2}$ setze man $a^{\frac{2}{3}}$ (§. 34.) Hernach bringe man diese Exponenten unter einerley Benennung, wie man mit Brüchen zu dieser Absicht in der Arithm.

§. 70 verfahren ist. Z. E. $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$ und $\sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}}$ (§. 34.). $a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2 \times 5}{3 \times 5}} = a^{\frac{10}{15}}$ und $a^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{4 \times 3}{5 \times 3}} = a^{\frac{12}{15}}$. Nun ist $a^{\frac{10}{15}} = \sqrt[15]{a^{10}}$ und $a^{\frac{12}{15}} = \sqrt[15]{a^{12}}$, und haben also beyde einerley Benennung.

Hieraus ist aber zu ersehen, daß man das verlangte gleich erhalten hätte, wenn man den Exponenten der Wurzel und den Exponenten der Dignität von der Wurzelgröße, mit dem Exponenten der Wurzel in der andern Wurzelgröße multiplicirt hätte, Z. E. $\sqrt[3]{a^2}$ wenn beyde Exponenten durch den Exponenten 5 der andern Wurzelgröße multiplicirt werden, so ist $\sqrt[15]{a^{10}}$ wie vorher.

Also könnten leicht die allgemeinen Wurzelgrößen $\sqrt[m]{a^q}$ und $\sqrt[n]{a^p}$ zu einerley Benennung gebracht werden, sie würden alsdann $\sqrt[mn]{a^{qn}}$ und $\sqrt[mn]{a^{pm}}$.

§. 37. Zus. Wurzelgrößen lassen sich addiren, und subtrahiren, wenn man sie mit ihren Zeichen nebeneinander setzt. Z. B. $\sqrt{a^3} + \sqrt{a}$. Man könnte sie auch nach §. 36 zu einerley Benennung erst bringen, sie würden dadurch $\sqrt[4]{a^{12}} + \sqrt[4]{a^2}$. Ist aber in beyden Größen das Wurzelzeichen und überdas die Größe, die hinter dem Wurzelzeichen stehet, einerley, so kann die Addition und Subtraction

wirklich verrichtet werden. Z. E. $3\sqrt[4]{a^5 b} + 4\sqrt[4]{a^5 b} = 7\sqrt[4]{a^5 b}$. In Zahlen findet oft eine Abkürzung statt, wenn man nach §. 35 aus einem Theil, der hinter dem Wurzelzeichen stehet, die Wurzel ausziehet. Z. B. $\sqrt{48} + \sqrt{75} = \sqrt{16 \times 3} + \sqrt{25 \times 3} = 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$ (§. 35.). $= 9\sqrt{3}$.

§. 38. Zus. Wurzelgrößen werden miteinander multiplicirt, wenn man sie unter einerley Benennung bringt, hernach die Größen, die hinter dem Wurzelzeichen stehen, miteinander multiplicirt, und vor das Product das gemeinschaftliche Wurzelzeichen setzt. Z. E. Es sey $\sqrt[3]{a}$ zu multipliciren in $\sqrt[5]{b^4}$. Man bringe sie unter eine Benennung, so ist die erste (§. 36.) $= \sqrt[15]{a^{10}}$ die zweyte $= \sqrt[15]{b^{12}}$. Beyde multiplicirt $= \sqrt[15]{a^{10} b^{12}}$. Wäre $\sqrt{a}$ zu multipliciren mit $\sqrt{a}$, so hätten beyde eine Benennung, das Product wäre $\sqrt{aa} = \sqrt{a^2} = a^{\frac{2}{2}}$ (§. 36.) $= a^1 = a$. Nämlich wenn eine Quadratwurzel mit sich selbst multiplicirt wird, so entstehet das Quadrat. Also ist auch $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{aaa} = \sqrt[3]{a^3} = a^{\frac{3}{3}} = a^1 = a$, oder die Cubikwurzel dreymal mit sich selbst multiplicirt, giebt den Cubus der Größe. Ferner es sey $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ so ist das Product $\sqrt{ab}$. Stehen vor den Wurzelgrößen Zahlen, so werden solche ebenfalls mitein-

an-

ander multiplicirt. Z. B. $3\sqrt{a} \times 4\sqrt{df} = 12\sqrt{adf}$.

Bestehen die Wurzelgrößen aus mehr als einem Gliede, so muß man jedes Glied des einen Factors in alle Glieder des andern Factors multipliciren, wie schon aus §. 20 ohnedas bekannt ist. Z. E.

$$\begin{array}{l} \sqrt{3} + \sqrt{2} \\ \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ \hline \sqrt{9} + \sqrt{6} \\ \quad\;\; - \sqrt{6} - \sqrt{4} \\ \hline \sqrt{9} \qquad\quad - \sqrt{4} \end{array}$$

Aus beyden ließe sich in diesem Falle die Wurzel herausziehen, und das Product ist also $3 - 2 = 1$.

§. 39. Zus. Wenn zwo einzelne Wurzelgrößen einerley Benennung haben, so dividirt man sie nach der schon bekannten Art (§. 21.), und schreibt vor den Quotienten das Wurzelzeichen. Z. E.

$$\frac{\sqrt{ce}}{\sqrt{fe}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{f}}$$

*

Ferner

$$\frac{\sqrt{a^3 b^4}}{\sqrt{a^2 b^2}} = \sqrt{ab^2} \text{ (§. 26.)}$$

Stehen vor dem Wurzelzeichen des Divisors und Dividendus noch andere Factoren, so werden diese ebenfalls nach bekannter Methode behandelt. Z. E.

$$\frac{ad\sqrt{xb^3m}}{ga\sqrt{xbn}} = \frac{d\sqrt{b^2m}}{g\sqrt{n}}$$

§. 40. Anm. Wenn ich nicht wüßte, daß Lehrer ohnedas gewohnt wären, die Anfänger in dergleichen Rechnungen, wie bisher vorgetragen worden sind, zu üben; so würde ich noch mehrere Beyspiele hierhergesetzt haben. Es ist eine von den nützlichsten Beschäftigungen, die Anfänger unternehmen können. Wer irgend Clemms mathematisches Lehrbuch, oder de la Caille Lect. elementar. oder ein anders weitläuftiges Werk besitzt, der kann dieser Ausdrücke von Wurzelgrößen genug finden, und sich darnach üben.

§. 41. Erkl. Eingebildete Wurzeln (radices imaginariae) sind Wurzeln von negativen Größen, welche gerade Exponenten haben. Z. E. man sollte die Quadratwurzel aus -4 ziehen, so wäre $\sqrt{-4}$ eine imaginäre oder eingebildete Wurzel.

§. 42. Zus. Solche imaginäre Wurzeln werden mit Recht unmögliche genannt. Denn nähme man an, die Wurzel aus -4 wäre $+2$, so ist das Quadrat davon $+4$ und also nicht -4, folglich ist $+2$ auch keine Wurzel aus -4. Man nehme

nun

nun an, die Wurzel aus -4, sey -2, so ist ebenfalls $-2 \times -2 = +4$, und ist also wiederum -2 keine Wurzel aus -4. Da aber zwischen $+2$ und -2 kein dritter Fall mehr möglich ist; so ist die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl unmöglich.

§. 43. Lehrsatz. Von einer negativen Größe sind alle Potenzen positiv, deren Exponenten gerade sind, und alle Potenzen sind negativ, deren Exponenten ungerade sind.

Bew. Wenn $-e$ in $-e$ multiplicirt wird, so entstehet $+e^2$. Man multiplicire $+e^2$ ferner in die Wurzel $-e$, so ist der Cubus von $-e$ $= -e^3$. Nun werde $-e^3$ wieder durch die Wurzel $-e$ multiplicirt, so entstehet $+e^4$ und so wechseln die Zeichen immer ab, daß also die Potenzen von einer negativen Wurzel, die einen ungeraden Exponenten haben, negativ, die einen geraden Exponenten haben, positiv werden.

§. 44. Zus. Wer also aus einer Potenz, die negativ ist, und einen geraden Exponenten hat, eine Wurzel ziehen will, der sucht etwas unmögliches; denn es giebt keine negative Größe, die eine solche Potenz wäre. Es ist überdas aus dem Lehrsatze klar, daß die Wurzel eines ungeraden Exponenten einerley Zeichen mit ihrer Potenz hat. Z. E. von

$-e^3$ wäre die Wurzel $-e$; so ist in Zahlen $\sqrt[3]{-8} = -2$. Denn $-2 \times -2 = +4$ und $+4 \times -2 = -8$.

§. 45. Zus. Ist die unmögliche Größe eine Quadratwurzel aus einer negativen Größe; so ist ihr Quadrat diese negative Größe selbst. Z. E. wenn $\sqrt{-4}$ die Wurzel aus -4 ist; so muß auch das Quadrat von $\sqrt{-4} = -4$ seyn. Denn wenn die Wurzel mit sich selbst multiplicirt wird, so muß das Quadrat entstehen. Weil nun $\sqrt{-4}$ die Wurzel ist; so muß auch $\sqrt{-4} \times \sqrt{-4} = -4$ seyn.

§. 46. Anm. Man muß unmögliche Wurzeln nicht mit irrationalen verwechseln. Diese letzten sind aus der Arithm. §. 97. bekannt. $\sqrt{5}$ würde eine irrationale Wurzel seyn, weil man selbige nicht vollkommen findet, wenn man auch immer fortrechnete.

§. 47. Lehrs. Wenn das Quadrat einer Irrationalzahl rational ist, so sind alle Potenzen, die einen geraden Exponenten haben, rational, alle Potenzen, die einen ungeraden Exponenten haben, irrational.

Bew. Es sey $\sqrt{a}$ eine Zahl, wovon das Quadrat a rational ist, so wird der Cubus davon $a\sqrt{a}$ also irrational; die vierte Potenz wird $a\sqrt{a}\sqrt{a}$

$= aa$

$= aa$, folglich wieder rational u. s. f. In Zahlen läßt sich der Beweis erläutern. Weil von $\sqrt{3}$ das Quadrat 3 rational ist, so wird der Cubus $3\sqrt{3}$ die vierte Potenz $3\sqrt{3}\sqrt{3} = 3 \times 3 = 9$, folglich wieder rational.

VI. Abschnitt.

Allgemeine Lehren von den geometrischen Proportionen und ihrer Anwendung.

§. 48. Lehrs. Eine geometrische Proportion kann durch $a : ma = b : mb$ allgemein ausgedrückt werden.

Bew. Wenn in beyden Verhältnissen die Ordnung der Glieder und überdas der Exponent einerley ist; so machen sie eine geometrische Proportion aus. Dieses trift nun hier zu. Denn in beyden Verhältnissen ist der Exponent m, und in in beyden stehet das kleinere Glied voran.

§. 49. Lehrs. Ausser den in der Arithmetik bewiesenen Lehrsätzen verdienen noch folgende bemerkt zu werden. Weil $a : ma = b : mb$, so ist auch:

componendo

$$a + ma : ma = b + mb ; mb$$

subtrahendo vel differentiando

$$a - ma : ma = b - mb : mb$$

multiplicando

$$ap : map = b : mb$$
$$ap : ma = bp : mb$$
$$ap : map = bp : mbp$$

Hier bedeutet p eine Zahl, in welche die Glieder der Proportion multiplieirt sind.

diuidendo

$$\frac{a}{p} : \frac{ma}{p} = b : mb$$
$$\frac{a}{p} : ma = \frac{b}{p} : mb$$
$$\frac{a}{p} : \frac{ma}{p} = \frac{b}{p} : \frac{mb}{p}$$
$$\frac{a}{p} : \frac{ma}{p} = \frac{b}{q} : \frac{mb}{q}$$

In Zahlen heißen die Lehrsätze. Weil 6 : 2 = 12 : 4, so ist

componendo

$$6 + 2 : 2 = 12 + 4 : 4$$

differentiando

$$6 - 2 : 2 = 12 - 4 : 4$$

mul-

multiplicando

$$3 \times 6 : 3 \times 2 = 12 : 4$$

$$3 \times 6 : 2 = 3 \times 12 : 4$$

$$3 \times 6 : 3 \times 2 = 3 \times 12 : 3 \times 4$$

diuidendo

$$\frac{6}{2} : \frac{2}{2} = 12 : 4$$

$$\frac{6}{2} : 2 = \frac{12}{2} : 4$$

$$\frac{6}{2} : \frac{2}{2} = \frac{12}{2} : \frac{4}{2}$$

$$\frac{6}{2} : \frac{2}{2} = \frac{12}{4} : \frac{4}{4}$$

Bew. In einer geometrischen Proportion muß das Product der beyden äussern Glieder so groß als das Product der mittlern seyn; diese Eigenschaft wird in allen obgenannten Arten zu schliessen wahrgenommen. Daher stehen die Glieder auch in Proportion. Z. B. wir wollen den ersten Satz betrachten:

$$a + ma : ma = b + mb : mb$$

Die äussern ($a + ma$) und mb miteinander multiplicirt, geben das Product $amb + mamb$; die beyden mittlern ma und ($b + mb$) aber geben das Product, $mab + mamb$, das vollkommen mit vorigem einerley ist.

§. 50. Lehrs. Wenn man alle vier Glieder einer Proportion zu einerley Potenz erhebt, oder aus allen vier Gliedern einerley Wurzel ziehet; so bleiben die Größen in Proportion.

Z. B.

z. B. wenn

$$a : ma = b : mb$$

so ist auch

$$a^2 : m^2 a^2 = b^2 : m^2 b^2$$

und überhaupt

$$a^n : m^n a^n = b^n : m^n b^n$$

wie auch

$$\sqrt{a^2} : \sqrt{m^2 a^2} = \sqrt{b^2} : \sqrt{m^2 b^2}$$

und überhaupt

$$\sqrt[n]{a^n} : \sqrt[n]{m^n a^n} = \sqrt[n]{b^n} = \sqrt[n]{m^n b^n}$$

Bew. Ist, wie vorher, denn das Product der äussern wäre $a^2 m^2 b^2$ dem Product der mittlern $m^2 a^2 b^2$ vollkommen gleich.

§. 51. Zus. Folglich darf man nicht die zwey ersten Glieder allein auf eine Potenz erheben, wenn die Größen proportional bleiben sollen. Z. E. $a^2 : m^2 a^2 = b : mb$ machen keine Proportion. Ingleichen bleiben alsdann die Größen nicht mehr proportional, wenn man beyde Verhältnisse auf verschiedene Potenzen erhebt: Z. E. $a^2 : m^2 a^2 = b^3 : m^3 b^3$. In diesen Fällen kommen beym multiplliciren der äussern und mittlern Glieder nicht einerley Producte heraus.

§. 52.

§. 52. Zus. Aus der Proportion $a : ma = b : mb$ würde permutando folgen, wie dieses schon in der Arithmetik §. 151 bewiesen ist, $a : b = ma : mb$ ingleichen invertendo $b : a = mb : ma$. Auch selbst die gegebene Proportion würde invertendo werden, $ma : a = mb : b$. In allen diesen Proportionen könnte man wieder componendo schliessen, z. E. aus $a : b = ma : mb$ würde seyn $b + a : b = ma + mb : mb$; aus $b : a = mb : ma$ würde seyn $b + a : a = mb + ma : ma$ u. s. w. Man bekäme aus einer Proportion auf diese Weise verschiedene andere, die alle componendo erhalten werden. Hieraus zeigt sich, daß diese Sätze allemal noch mehrere in sich enthalten, die sich alle aus den vorigen erklären liessen. Ueberhaupt die Lehre von den Proportionen ist fruchtbar an Sätzen, die alle in der Mathematik von unsäglichen Nutzen sind. Wolf nennet deswegen die Proportion die Seele der Mathematik.

§. 53. Lehrs. Wann die ähnlich liegenden Glieder zwoer Proportionen miteinander multiplicirt werden, so sind die Producte ebenfalls in Proportion z. E.

$$\begin{array}{l} a : ma = b : mb \\ g : ng = h : nh \\ \hline ag : mang = bh : mbnh \end{array}$$

Bew.

Bew. Hier ist wieder das Product der äussern dem Producte der mittlern Glieder gleich.

§. 54. Zus. Wenn auch mehrere Proportionen auf diese Art miteinander multiplicirt werden, so sind die Producte proportional.

§. 55. Zus. Es sey also $T : t = E : V$
und $C : c = V : e$

so ist $CT : ct = VE : eV$

Oder wenn man die beyden letzten Glieder durch V dividirt, so ist $CT : ct = E : e$.

Es bedeuten hier T und t Zeiten; E und e Wirkungen; C und c die Ursachen, welche diese Wirkungen hervorbringen; so sind allemal die beyden Proportionen richtig; nämlich wenn die wirkenden Ursachen gleich sind, so verhalten sich die Zeiten, wie die Wirkungen. Z. E. Es würde ein Kapital von 100 fl. ausgelehnt, so ist dieses eine wirkende Ursache, und es trüge in einem Jahre 4 Procent, es trägt also in zweyen Jahren doppelt so viel Interesse; folglich ist

1 J: 2 J = 4 fl: 8 fl.

Wären aber die Zeiten gleich, so verhalten sich die Zeiten, wie die Wirkungen, welches die zwote Proportion ist. Z. E. 100 fl würden 4 fl in einem

Jahr

Jahre Interesse tragen, und also das doppelte Kapital 200 fl auch doppelt so viel Interesse. Oder es würde seyn

100 fl : 200 fl = 4 fl : 8 fl.

Wenn in der Proportion CT : ct = E : e fünf Buchstaben in Zahlen gegeben wären, so könnte man allezeit den andern finden. Z. E. da CTe = ct E oder das Product der äussern gleich ist dem Product der mittlern Glieder, so ist, wenn beyderseits mit CT dividirt wird $\frac{CTe}{CT} = \frac{ctE}{CT}$ oder $e = \frac{ct\,E}{CT}$

Man nennet diese Regel die Regel von Fünfen (regulam de quinque). Man hat nun verschiedene Methoden, diese Regel aufzulösen. Die kürzeste ist diese: Man setze die gegebenen Glieder in zwo Reihen über einander, daß beyderseits einerley Namen zu stehen kommen, das sich dann am besten bewerkstelligen läßt, wenn man mit dem unbekannten Glied anfängt. Es sind also die Producte auf beiden Seiten gleich, und das unbekannte Glied wird gefunden, wenn man beiderseits mit den Zahlen dividirt, die mit dem unbekannten Glied multiplicirt sind. Man drückt die Regel auch so aus: Alle Theile einer Größe, wodurch die Größe bestimmt, oder determinirt wird, setzt man auf einer Seite der durch sie bestimmten Größe wechselweise gegen über.

Z. E.

Z. E. 7000 fl. geben in 12 Jahren 4000 fl. Interesse, was geben 13000 fl. in 9 Jahren?

7000 fl.	4000 fl. Int.
12 Jahre	13000 fl.
x Inter.	9 Jahre

$$7000 \times 12 \times x = 4000 \times 13000 \times 9$$

$$x = \frac{4000 \times 13000 \times 9}{7000 \times 12}$$

Man kann über das noch den Vortheil anwenden, daß man gleich auf beyden Seiten durch eine dritte Zahl dividirt, wenn sich zwo Zahlen dadurch dividiren lassen. Im vorigen Beyspiele könnte man erst beiderseits mit 1000 dividiren, hernach mit 4 und endlich mit 3. Wie hier zu sehen ist.

7ØØØ	4ØØØ	1000
3 12	13ØØØ	
x	9 3	

$$7\,x = 13000 \times 3$$

Beiderseits mit 7 dividirt

$$x = \frac{13000 \times 3}{7} = 5571\tfrac{3}{7}$$

Daß das Exempel recht nach der Vorschrift angesetzt sey, erhellet aus folgender Betrachtung. Die 7000 fl Kapital und die Zeit von 12 Jahren bestimmen die Größe der Interesse von 4000 fl und

kom-

kommen also 7000 und 12 auf eine Seite zu stehen, und die Interesse auf die andere, welches nämlich die bestimmte Größe ist. Eben so bestimmen 13000 fl. in der Zeit des Auslehnens von 9 Jahren die Interesse x, die man sucht. Beyde erste kommen also wieder auf eine Seite, und x auf die andere.

Es sey folgende Frage aus **Euler** aufzulösen. Wenn man für 8 Pferde auf 3 Meilen einen Ducaten bezahlt, wie hoh kommen 30 Pferde auf 4 Meilen zu stehen.

2	8 Pf.	1 Duc.	
	3 Meil.	30 Pf.	10
	x Duc.	4 M.	

$2\,x = 10 \quad | \; x = \frac{10}{2} = 5$ Ducaten.

Eine solche Regel von Fünfen kann aufgelöset werden, die Glieder mögen gegeben seyn, wie sie wollen. Z. B. 100 Personen verzehren in einer Wochen 21 Centner Fleisch, wie viel Personen verzehren in 5 Wochen 63 Centner.

20.	100 Pers.	21 Cent.
	3 Woch.	x Pers.
3.	63 Cent.	5 Woch.

$20 \times 3 \times 3 = x$ oder 180 Personen.

Wenn in dergleichen Exempeln Brüche vorkommen,

men, so werden die Nenner ausgestrichen, und wechselweise auf die entgegengesetzte Seite als ganze Zahlen gebracht, womit man multipliciren muß. Z. E. Da $5 = \frac{10}{2}$, so ist auch $2 \times 5 = 10$. Sind die Brüche neben ganzen Zahlen, so bringt man erst die ganze Zahl mit dem Bruch zu einer Benennung, und verfährt, wie vorher. Folgendes Exempel kann dieß anzeigen. Wenn für ein Pferd auf eine Meile $\frac{1}{2}$ fl bezahlt wird, wie viel muß für 28 Pferde auf $4\frac{1}{2}$ Meile bezahlt werden.

2	1 Pf.	$\frac{1}{2}$
	1 M.	28 Pf. 14 7
2	x fl.	$4\frac{1}{2}$ M. $= \frac{9}{2}$ M

$$x = 7 \times 9 = 63 \text{ fl.}$$

Die 1 kann man ausstreichen, weil sie nicht multipliciren.

Man kann auch auf diese Art probiren, ob man recht gerechnet hat. Denn man könnte jetzt fragen, da 28 Pferde auf $4\frac{1}{2}$ Meile 63 fl. kosten, was muß man für 1 Pferd auf eine Meile bezahlen, und da muß $\frac{1}{2}$ fl. wieder herauskommen.

28 Pf.	63 fl	
$4\frac{1}{2}$ M.	1 Pf	2
$\frac{9}{2}$ x f	1 M	

$$9 \times 28 \times x = 63 \times 2$$
$$28 \times x = 7 \times 2$$
$$4 \quad x = 2$$
$$x = \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{2} \text{ fl.}$$

Von diesen Rechnungen siehet man den Grund ein, wenn man sie mit obigem allgemeinen Ausdruck $c = \frac{ctE}{CT}$ vergleichet.

§. 56. Zus. Nach der gegebenen Vorschrift werden auch auf eine leichte Art alle die Fälle aufgelöset, wo 7 oder 9 oder mehrere Größen gegeben sind. Man pflegt es die regulam septem, oder wenn 9 Größen gegeben sind, die regulam nouem zu nennen. Es ist hier nur nöthig, daß ich einige Beyspiele hersetze. Macko in Element. Algebr. p. 183 hat diese Frage: Ein hölzerner Balken, der 4 Schuhe lang, 3 Schuhe breit, und 2 Schuhe dick ist, wiegt 240 Pfund; wie viel wird ein anderer Balken von dem nämlichen Holz wiegen, der 10 Sch. lang, 4 Sch. breit, 1. Sch. dick ist.

Hier darf man nur überdenken, daß die Länge von 4 Sch. die Breite von 36 und die dicke von 2 Sch. das Gewicht vom Balken bestimmen; folglich müssen nach der Regel die drey ersten Zahlen auf eine Seite zu stehen kommen, und das dadurch bestimmte Gewicht von 240 Pf. auf die andere. Nun zeigt sich schon von selbst, daß die übrigen gegebenen Zahlen auf die Seite, wo 240 Pf. stehen, gebracht werden müssen, weil sie vermöge der Regel, den andern Größen, die einerley Namen haben, gegenüber zu stellen sind (§. 55.). Z. E.

1 Balken	wiegt 240 Pf. 80	40
4 Sch. lang	1 Balken	
3 Sch. breit	10 Sch. lang	
2 Sch. dick	4 Sch. breit	
wiegt x Pf.	1 Sch. dick	

$$x = 40 \times 10 = 400 \text{ Pf.}$$

Es sey ferner folgende Aufgabe gegeben, (aus Macko p. 186). 25 Schreiber, von welchen jeder in einem Tage 9 Stunden schreibt, schreiben in 8 Tagen 36 Bücher Papier, wenn man 15 Schreiber nimmt, deren jeder in einem Tage 8 Stunden schreibt, in wie viel Tagen schreiben selbige 28¼ Buch Papier voll.

Weil es eine Regula Septem ist, so macht

Ma-

Macko drey Regeln detri hieraus; worunter eine umgekehrte Regel detri ist. Solche Rechnung ist nicht allein beschwerlich, sondern auch der Gefahr unterworfen, daß Anfänger eher irren, als bey unserer Methode, nach welcher ich dieß Beyspiel auflösen will.

5 25 Schreiber	36 Buch Pap. 5
1 Tag	15 Schreiber 3
3 9 Stunden	1 Tag
8 Tagen	8 Stunden
4 $\frac{144}{5}$ $28\frac{4}{5}$ Buch P.	x Tag

$3 \times 4 = 12$ Tagen $= x$

Es können solchergestalt alle Fragen aufgelöset werden; und man thut wohl, daß man sich in mehrern Beyspielen übet, damit man eine Fertigkeit erlangt.

§. 57. Anm. Ich will hier noch in einem Beyspiele zeigen, wie die umgekehrte Regel detri auf die nämliche Art kann behandelt werden. 125 Soldaten machen eine Schanze in 6 Monaten, wie viel Soldaten werden erfodert, um diese Schanze in 2 Monaten zu Stande zu bringen.

	125 Sold.	1 Schanze
3	6 M.	x Sold.
	1 Schanze	2 M.

$3 \times 125 = 375$ Sold. $= x$

Noch ein Beyspiel aus Clemms mathem. Lehrbuch S. 153. Wenn 8 Ellen $\frac{9}{4}$ breites Tuch auf ein Kleid gehen, wo viel braucht man davon, wenn es $\frac{3}{4}$ breit ist.

	8 El.	1 El.
		x El.
3	$\frac{9}{4}$ br.	$\frac{3}{4}$ br.
	1 Kl.	

$3 \times 8 = x = 24$ Ellen

§. 58. Zus. Wir schlossen in §. 55. aus der Proportion,

$$T : t = E : V$$
und $$C : c = V : e$$

daß auch $CT : ct = E : e$

Von einem solchen Verhältnisse, wie hier $E : e$ das durch die Multiplication zweyer anderer entstanden ist, pflegt man zu sagen, daß es ein zusammengesetztes Verhältniß (ratio composita,) sey, und die Proportion wird oft so ausgedrückt. $\overline{T : t} + \overline{C : c} = \overline{E} : e$, wo das Zeichen + dann

kei=

keine Addition, sondern eine Zusammensetzung der Verhältnisse anzeigt; das heißt, daß das vorhergehende Glied des einen Verhältnisses mit dem vorhergehenden des andern, und das nachfolgende Glied des einen Verhältnisses mit dem nachfolgenden des andern multiplicirt werden sollte.

§. 59. Zus. Es kann ein Verhältniß aus mehr als einem zusammengesetzt seyn. Z. E. wenn

$$\begin{array}{l} a : b = c : d \\ f : g = d : e \\ h : k = e : l \\ m : n = l : p \\ \hline \end{array}$$

so ist $afhm : bgkn = cdel : delp$

$$afhm : bgkn = c : p.$$

Wenn man nämlich diese Proportionen nach §. 53 miteinander multiplicirt, und beyde Glieder des letzten Verhältnisses nach §. 54 dividirt.

Oder das Verhältniß $\overline{c : p}$ ist aus den vier Verhältnissen $\overline{a : b} + \overline{f : g} + \overline{h : k} + \overline{m : n}$ zusammengesetzt. Diese Zusammensetzung der Verhältnisse ist der Grund von der Kettenregel, die in vielen Rechnungen, sonderlich bey Kaufmanns und Wechselrechnungen von unendlichem Nutzen ist.

Wenn z. E. die 4 Pf. = 1 Kr. 3 Kr. = 1 Groschen, und 20 Gro. = 1 fl und 15 fl = 3 Dukaten, so fragt sich, wie viel Pf. auf einen Ducaten gehen. Wenn man folgende Proportionen

macht, so sieht man leicht, daß hier eine Zusammensetzung der Verhältnisse statt findet.

4 : 1 = Pf : Kr.
3 : 1 = Kr : Gr.
20 : 1 = Gr : fl.
15 = 3 = fl : Ducat.

4 × 3 × 20 × 15 : 3 = Pf : Duc.
4 × 20 × 15 : 1 = Pf. Duc.
1200 : 1 = Pf : Duc.

Herr Euler in der vollständigen Anleitung zur Algebra sagt im I Th. S. 216: " Diese Lehre ist in dem allgemeinen Handel und Wandel von solcher Nothwendigkeit, daß fast niemand dieselbe entbehren kann.„ Ich halte es daher für dienlich, nach dem Beyspiele dieses großen und erhabenen Lehrers diese Lehren durch Beyspiele, so viel es der Raum verstattet, zu erläutern.

Es ist aber noch zu merken, daß in der Ausübung die Rechnung ungemein abgekürzt werden kann. Nach Hrn. Euler muß man folgende Ordnung gebrauchen: Man fängt mit eben der Sache an, von welcher die Frage ist, und vergleicht dieselbe mit einer andern, mit welcher das folgende Verhältniß wieder angefangen, und dieselbe mit einer dritten wieder verglichen wird, so daß ein jedes Verhältniß

niß mit eben der Sache wieder anfängt, mit welcher das vorige aufgehört hat; und so fährt man fort, bis man auf diejenige Sache kömmt, in welcher die Antwort stehen soll. Noch mehr wird die Rechnung abgekürzt, wenn sich irgend ein Glied in der einen Reihe gegen eins in der andern Reihe aufheben läßt, da man dann die Glieder ausstreicht, und an ihre Stelle die Quotienten setzt, welche man durch diese Aufhebung erhält.

Die Regel wird durch folgende Beyspiele deutlicher werden. Ein wienerischer Kaufmann soll 4950 Ducati di Banco auf Venedig überschicken, er verrichtet solches über Augspurg, es gelten aber 98 Thaler Wienergeld in Augspurg 100 Thlr. und 183 fl Augspurgergeld gelten in Venedig 100 Ducati di Banco. Es ist die Frage, wie viel der Kaufmann in Wien zu erlegen habe. Aus **Fr. Johann Michael Schwarzers** Arithmetica Mercatorum, oder **vollständigem kaufmännischen Rechenbuch** S. 253.

	495ø Ducati di Banco
100 Ducati =	~~183~~ fl in Augsp. 61
3 fl =	2 Thlr.
10ø Thlr. wien. =	98 in Augspurg

100 X 10 = 495 X 61 X 2 X 98

100ø = 591822ø

Beiderseits mit 100 dividirt ist die verlangte Zahl von Gulden = 5918 $\frac{22}{100}$ fl, welchen Bruch man dann leicht zu Kr. und Pfenningen machen kann.

Es ist aber sonderlich in diesen Arten von Rechnungen zu beobachten, daß wenn irgend eine Art von Geld in Gulden und Gr. oder Kr. vorkömmt, dieses alles zu fl gemacht werde; Z. E. da ein baierischer Thaler 2 fl 24 Kr. gilt; so konnte man statt 24 Kr. 8 Groschen setzen, und diese wären wie schon in der Arithmetik gezeigt worden $\frac{8}{20}$ fl.

Man fragt z. E. wiel 1000 Ducaten in baierischen Thalern betrüge; so setze man

			1000 Duc.
	1 Duc.	=	5 fl. × 20
$\frac{48}{20}$	2 $\frac{8}{20}$ fl.	=	1 baier. Thal.

48	=	1000 × 5 × 20
48	=	200000

Beyderseits mit 48 dividirt, erhält man 2083 $\frac{16}{48}$ = 2083 $\frac{1}{3}$ baierische Thaler.

Verlangte man zu wissen, wie viel baierische Thaler eine Anzahl von Gulden ausmachte, ohne daß noch etwas übrig bliebe; so wäre

1 =	
$2\frac{8}{20}$ fl. =	1 fl.
$\frac{48}{20}$	= 1 baier. Thlr. X 20

48 fl. = 20 baier. Thlr.

Nach der Regel detri wäre hier fl: baier. Thlr. = 1 : $2\frac{8}{20}$ und das Product der äussern wäre $2\frac{8}{20}$ fl. = 1 baier. Thlr. oder $\frac{48}{20}$ fl. = 1 baier. Thlr. beyderseits mit 20 multiplicirt 48 fl. = 20 bai. Thlr. wie vorher.

Folgendes Beyspiel ist aus Euler S. 220. Wenn die Ducaten in Hamburg 1 p. cent. besser sind als zween Rthlr. Banco (das ist, wenn 50 Ducaten nicht 100, sondern 101 Rthlr. Banco machen) und der Cours zwischen Hamburg und Königsberg 119 Gr. Poln. ist, (das ist 1 Rthlr. Bo. macht 119 Gr. Poln.) wie viel machen 1000 Ducaten in Fl. Poln. (30 Gr. Poln. machen 1 fl. Poln.)

	1000 Duc
1 Duc. =	2 Rthlr. Bo.
100 Rthlr. Bo =	101 Rthlr.
1 Rthlr. =	119 Gr. Poln.
30 Gr. Poln. =	1 fl. Poln.

Oder beyderseits durch 3 dividirt x = $8012\frac{2}{3}$ fl. Poln.

Wer

Wer mehrere Beyspiele dieser Art verlangt, der kann sie bey Euler finden, oder in des obgedachten Fr. Schwarzers seinem vollständigen kaufmannischen Rechenbuch.

Zum Beschluß wollen wir noch folgende Fragen auflösen. Man kauft 1 Fuder Wein um 100 fl, wie viel kostet die Maaß? (Ich rechne hier, wie am Rhein gebräuchlich, 9 Ohmen auf ein Fuder und 80 Maaß auf eine Ohm). Da die Maaß, wie man gleich siehet, keinen fl kosten kann, so fange man mit Kr. an, und höre auch damit auf.

1 Maaß	x Kreuzer
1 Ohm	80 Maaß
1 Fuder	9 Ohm
100 fl.	1 Fuder
60 Kr.	1 fl.

$$60 \times 10 = 8 \times 9 \times x$$

$$600 = 72\,x$$

Beiderseits mit 72 dividirt $x = 8\frac{1}{3}$ Kr., das eine Maaß kostet. Wenn man sehen will, ob man recht gerechnet; so nimmt man an, eine Maaß kostet $8\frac{1}{3}$ Kr. und sucht, was ein Fuder kosten werde. Ist die Rechnung richtig, so müssen in diesem Falle 100 fl. heraus kommen, die das Fuder gekostet hat, wie wir zuvor wissen.

Ein

Ein Paar Ochsen haben 250 fl gekostet, und beyde haben 16 Centner gewogen, man fragt wie hoh das Pfund zu stehen gekommen (Ich nehme den Centner hier = 100 Pfund).

1 Pf.		x Kreuzer
1 Cent.	=	1ØØ Pf.
1 Paar Ochs.	=	16 Cent.
25Ø fl	=	1 Paar Ochsen
6Ø Kr.	=	1 fl

$$25 \times 6 = 16\,x$$

$$150 = 16\,x$$

Beiderseits mit 16 dividirt $x = 9\tfrac{6}{16} = 9\tfrac{3}{8}$

VII. Abschnitt.

Die Lehre von den Progreßionen oder Reihen und allgemeine Begriffe von den Logarithmen.

§. 60. Erkl. Eine Reihe (series) oder Progreßion ist eine Menge von Zahlen, welche nach einem gemeinschaftlichen Gesetze aufeinander folgen. Eine arithmetische Progreßion ist diejenige, in welcher jedes vorhergehende Glied von dem unmittelbar darauf folgenden um einerley Zahl unterschieden ist. So wäre z. E. die Reihe Zahlen, welche

in

in natürlicher Ordnung aufeinander folgen 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. eine arithmetische Proportion; denn die Differenz von jeden zwey unmittelbar neben einander stehenden Gliedern ist 1. Eine geometrische Progreßion heißt die, worinn jedes vorhergehende Glied zu dem nächstfolgenden einerley Verhältniß hat. Z. E. 1, 2, 4, 8, 16, 32, u. s. w. ist eine geometrische Proportion; denn 1 ist in 2 so vielmal enthalten, als 2 in 4; und 2 in 4 so vielmal, als 4 in 8. u. s. w. Folglich hat jedes vorhergehende Glied zu dem nächstfolgenden einerley Verhältniß. Diejenige Zahl in der geometrischen Progreßion, welche anzeigt, wie vielmal das vorhergehende Glied in dem unmittelbar nachfolgenden enthalten ist, heißt der Exponent der Progreßion.

§. 61. Zus. Es können auch die folgenden Glieder in einer Progreßion immer kleiner, und gar Brüche werden, man sagt alsdann, daß die Progreßion fällt, oder es ist progressio descendens. Z. E. 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, u. s. w. ist eine geometrische Progreßion, welche fällt.

§. 62. Zus. Man nenne das erste Glied einer arithmetischen Progreßion a und die Differenz zwischen dem ersten und nächstfolgenden d; so muß das zweyte Glied, wenn es grösser als das erste seyn soll, a + d seyn; da das zweyte Glied und dritte wieder einerley Differenz mit dem ersten und zweyten

ten haben muß, so ist das dritte a+2d u. s. w. Eine arithmetische zunehmende oder wachsende Progreßion kann derohalben vorgestellt werden durch

I	II	III	IV	V
a,	$a+d$,	$a+2d$,	$a+3d$,	$a+4d$,

VI	VII	
$a+5d$,	$a+6d$,	u. s. w.

Die römischen Zahlzeichen bezeichnen, das wievielte ein jedes dieser Glieder sey.

§. 63. Zus. Jede drey aufeinander unmittelbar folgende Glieder machen eine arithmetische stetige Proportion aus. Es ist z. B. wenn wir IV, V, VI nehmen,

$$(a+3d)\ (a+4d) = (a+4d)(a+5d)$$

Denn wenn man die Summe der äussern Glieder sucht, so ist selbige der Summe der mittlern gleich (Arithm. §. 146.).

$$\begin{array}{c} a+3d \\ a+5d \\ \hline 2a+8d \end{array} \qquad \begin{array}{c} a+4d \\ a+4d \\ \hline 2a+8d \end{array}$$

§. 64. Zus Wenn die arithmetische Progreßion fallen soll; so müßte man die Differenz allemal von dem vorhergehenden Glied abziehen. Z. B. 19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 3, 1, und der obige allgemeine

Aus-

Ausdruck (§. 62.) verwandelte sich in diesen: a, a — d, a — 2d, a — 3d, a — 4d, u. s. w.

§. 65. Zus. Wenn in einer arithmetischen Progression das erste Glied, und die Differenz gegeben sind, so lassen sich die folgenden Glieder der Progression finden.

§. 66. Lehrs. Das letzte Glied in einer arithmetischen Progression ist der Summe des ersten Glieds, und der Differenz gleich, welche mit der um eins verminderten Anzahl der Glieder ist multiplicirt worden.

Bew. Es erhellet dieser Satz aus dem allgemeinen Ausdruck der arithmetischen Progression. Jedes Glied kann man nämlich als das letzte betrachten, wir wollen also das vierte als das letzte annehmen. Es ist dieses $= a + 3d$. Hier ist die Differenz mit der um eins verminderten Anzahl der Glieder multiplicirt. Wären z. E. n Glieder; so wäre das Glied selbst $a + (n - 1)d$, das dann ein allgemeiner Ausdruck wäre.

§. 67. Lehrs. Die Summe der äussersten und von den äussersten gleich weit abstehenden Gliedern sind in einer arithmetischen Progression gleich.

Bew.
$$\overset{I}{a},\ \overset{II}{a+d},\ \overset{III}{a+2d},\ \overset{IV}{a+3d},$$
$$\overset{V}{a+4d},\ \overset{VI}{a+5d},\ \overset{VII}{a+6d},$$

stellet

stellet jede arithmetische Progression vor. Addirt man hier nun das VII und I Glied, das VI und II, das V und III, das IV und IV, oder das mittelste doppelt genommen, so findet man, daß allemal, daß die Summen gleich sind. Z. E.

$$\begin{array}{rl} I = & a \\ VII = & a + 6d \\ \hline & 2a + 6d \end{array} \qquad \begin{array}{rl} II = & a + d \\ VI = & a + 5d \\ \hline & 2a + 6d \end{array}$$

§. 68. Aufg. Die Summe einer arithmetischen Progression zu finden.

Aufl. Man addire das erste und letzte Glied der gegebenen Progression zusammen, und multiplicire diese Summe mit der halben Anzahl der Glieder.

Bew. Wenn man unter eine arithmetische Progression die nämliche noch einmal, aber rückwärts setzt, und diese addirt, so ist überall die Summe von solchen 2 Gliedern gleich.

$$\begin{array}{cccc} a, & a + d, & a + 2d, & a + 3d \text{ u. s. w.} \\ a + 3d, & a + 2d, & a + d, & a \\ \hline 2a + 3d, & 2a + 3d, & 2a + 3d, & 2a + 3d. \end{array}$$

Oder überall ist die Summe von solchen zweyen Gliedern gleich. Es ist aber jede Summe gleich dem ersten Gliede a + dem letzten a + 3d. Multiplicirt man nun die Summe des ersten und letzten mit der Anzahl der Glieder, z. E. hier mit 4; so erhielte

 man

man die Summe der doppelten arithmetischen Progression; weil sie noch einmal darunter gesetzt ist. Man muß also nur mit der Hälfte der Anzahl der Glieder multipliciren, wenn man die Summe einer Progression haben will.

Ich will hier Beyspiele aus Hr. Euler S. 192 anführen. Es sey die Progression der natürlichen Zahlen 1, 2, 3. bis 100 gegeben; man sucht die Summe aller dieser Zahlen. Hier ist das erste Glied = 1 das letzte = 100. Also die Summe beyder 101. Die Anzahl der Glieder ist 100. Da nun mit der halben Anzahl der Glieder multiplicirt werden muß; so erhält man $101 \times 50 = 5050$.

Es wird gefragt, wie viel Schläge ein Schlaguhr in 12 Stunden thue. Hier müssen die Zahlen 1, 2, 3 bis 12 zusammen addirt werden. Die Summe des ersten und letzten Gliedes ist $= 1 + 12 = 13$. Die halbe Anzahl der Glieder $= 6$, die Summe wird also seyn $= 13 \times 6 = 78$.

Einer kauft ein Pferd mit dieser Bedingung: für den ersten Hufnagel bezahlt er 5 Kreuzer, für den zweyten 8 Kreuzer, für den dritten 11, und immer 3 Kreuzer mehr für den folgenden. Es sind aber in allem 32 Nägel, wie hoh kömmt das Pferd zu stehen?

Hier ist nun das letzte Glied noch unbekannt; da aber die Differenz 3, das erste Glied 5, und die

An-

Anzahl der Glieder 32 ist, so findet man selbes $= 5 + 31 \times 3 = 98$. Die Summe des ersten und letzten Gliedes ist nun $= 5 + 98 = 103$; die halbe Anzahl der Glieder $= 16$. Also kömmt das Pferd zu stehen $= 103 \times 16$ Kreuzer $= 1648$ Kreuzer $= 27$ fl 28 Kr.

§. 69. Zus. Ist die Anzahl der gegebenen Glieder in der arithmetischen Proportion ungerade; so multiplicirt man die Summe des ersten und lezten Gliedes in die ganze Anzahl der Glieder, und dividirt hernach das Product durch zwey. Wenn man die Summe der 9 natürlichen Zahlen suchte, so wäre das erste Glied $= 1$, das letzte $= 9$. Die Summe beider 10, die Anzahl der Glieder $= 9$. Folglich $10 \times 9 = 90$, und wenn man dieses Product durch 2 dividirt, so erhält man die Summe der Progreßion $= 45$.

§. 70. Lehrs. In einer arithmetischen Progreßion sind hauptsächlich folgende Stücke zu bemerken; die Differenz, das erste Glied, das letzte Glied, die Anzahl der Glieder, und die Summe der Glieder. Sind allemal drey von diesen gegeben, so läßt sich das vierte und fünfte finden.

Bew. Wenn man die Summe s, und die Anzahl der Glieder n, das erste Glied a, das letzte u nennet; so wäre nach §. 68 $s = (a + u) \frac{1}{2} n$. Wollte man nun aus diesen dreyen s, a und u

die Anzahl der Glieder wissen; so müßte man beiderseits mit 2 multipliciren. Es würde alsdann $2s = (a + u) n$; und beiderseits mit $a + u$ dividirt, so wäre $\frac{2s}{a+u} = n$.

Eben so wäre nach §. 66 das letzte Glied oder $u = a + (n - 1) d$. Hieraus könnte ebenfalls d oder ein anders unbekanntes gefunden werden, wenn drey bekannt wären. Wenn man z. B. d wissen wollte, so müßte man auf beyden Seiten a subtrahiren; dadurch würde $u - a = (n - 1) d$, und auf beiden Seiten mit $n - 1$ dividirt, erhielte man $\frac{u - a}{n - 1} = d$. Auf diese Art lassen sich jedesmal aus dreyen dieser Stücke, die man als bekannt annimmt, die zwey übrigen finden.

§. 71. Lehrs. Eine geometrische Progeßion läßt sich allgemein ausdrücken durch

I	II	III	IV	V	VI	VII	
a,	ma,	m^2a,	m^3a,	m^4a,	m^5a,	m^6a,	u. s. w.

Bew. In einer geometrischen Proportion muß jedes vorhergehende Glied zu dem unmittelbar nachfolgenden einerley Verhältniß haben (§. 60.). Wenn Wenn nun hier m den Exponenten bedeutet; und man dividirt jede zwey aufeinander folgende Glieder, so findet man, daß sie überall einerley Exponenten,

und

und folglich, daß jede zwey Glieder, die auf einander folgen, einerley Verhältniß haben.

§. 72. Zus. Der Exponent eines gegebenen Gliedes ist allemal um Eins weniger, als die Zahl des Gliedes. Z. E. In dem vierten Glied ist der Exponent $= 3$. Wollte man also das siebende Glied haben, so müßte man m^6 in a multipliciren. Wird die Anzahl der Glieder n genannt, so wäre das letzte Glied $m^{n-1}a$.

§. 73. Das Product der zwey äussersten, und jeder von den äussersten gleich weit abstehenden Gliedern ist in einer geometrischen Proportion gleich. Z. E. das Product aus dem ersten und lezten ist $a \times m^6 a = m^6 a^2$; das Product des zweyten und sechsten ist $ma \times m^5 a = m^6 a^2$.

§. 74. Zus. Folgende Reihe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ u. s. w. wäre eine fallende geometrische Progreßion. Wenn hier a das erste Glied, und m den Exponenten bedeutet; so wäre selbige allgemein, $a, \frac{a}{m}, \frac{a}{m^2}, \frac{a}{m^3}, \frac{a}{m^4}$, u. s. w.

§. 75. Zus. Jede drey unmittelbar aufeinander folgende Glieder in einer geometrischen Progreßion machen eine stetige geometrische Proportion. Z. E. es ist $a : ma = ma : m^2 a$. Denn das Product der äus-

äussern ist in diesem Falle allemal gleich dem Producte der mittlern.

§. 76. Aufg. Die Summe einer geometrischen Progreßion zu finden.

Aufl. Man multiplicire das letzte Glied mit dem Exponenten der Progreßion, von dem Producte subtrahire man das erste Glied, und den Rest dividire man durch den Exponenten weniger eins.

Bew. Es sey die Summe von folgenden Gliedern a, am^2, am^3, am^4, am^5, am^6 zu finden. Da die Glieder einer geometrischen Progreßion stetige Proportionen ausmachen (§. 63.), so ist:

$$a : am = am : am^2$$
$$am : am^2 = am^2 : am^3$$
$$am^2 : am^3 = am^3 : am^4$$
$$am^3 : am^4 = am^4 : am^5$$
$$am^4 : am^5 = am^5 : am^6$$

Betrachtet man diese Glieder etwas genauer, so stehen in der ersten Reihe untereinander alle Glieder der gegebenen Progreßion, ausgenommen das letzte. In der zwoten Reihe stehen ebenfalls alle Glieder der gegebenen Progreßion untereinander, ausgenommen das erste. Wenn man die Summe aller Glieder der gegebenen Progreßion S nennet, so ist die Summe der Glieder, die in der ersten Reihe unter-

einander stehen $= S - am^6$; die, welche in der zwoten Reihe unter einander stehen, $= s - a$. Da nun $S - am^6 : S - a = a : am$. Man setze der Kürze wegen für das letzte Glied am^6 den Buchstaben u; so ist $S - u : S - a = a : am$. Und da das Product der äussern Glieder gleich dem Product der mittlern ist, so wird $amS - amu = aS - a^2$. Oder wenn man überall mit a dividirt $mS - mu = S - a$. Man subtrahire beyderseits S; so bekömmt man $mS - S - mu = - a$. Man addire ferner beyderseis mu, so bleibt $mS - S = mu - a$. Für $mS - S$ kann man aber setzen $S(m - 1)$; denn wenn man wirklich multiplicirt, so erhält man das erste wieder. Derohalben ist $S(Sm - 1) = mu - a$, oder wenn man beiderseits mit $(m - 1)$ dividirt, $S = \frac{mu - a}{m - 1}$. Da nun m den Exponenten, u das letzte, a das erste Glied der Progreßion anzeigt; so wird die Summe so gefunden, wie die Regel gelehrt hat. Wir wollen das vorige Beyspiel etwas verändert hier anwenden. Einer verkauft sein Pferd nach den Hufnägeln, deren 32 sind, für den ersten Hufnagel fodert er einen Pfenning, für den zweyten 2 Pf. für den dritten 4 Pf. und immer für den folgenden zweymal so viel als für den vorigen. Nun ist die Frage, wie hoh dieses Pferd verkauft worden.

Weil das letzte Glied noch nicht bekannt ist; so müßte selbiges erst gesucht werden. Man kann aber

um die Rechnung zu erleichtern, folgendes bemerken: Da das erste Glied 1 ist; so ist das zweyte vermöge der Bedingung $=2$, das dritte $=4$ oder $=2^2$. Multiplicirt man 4 mit sich selbst, so bekömmt man $16=2^4$ und ferner 16 mit sich selbst multiplicirt, giebt $256=2^8$. Man erhält durch solche fortgesetzte Multiplication bald $2^{32}=4294967296$. Da aber das letzte Glied nur 2^{31}, (§. 72.), so darf man dieses Product nur durch 2 dividiren, $\frac{2^{31}}{2^1}=2^{31}$ und folglich das letzte $=$ 214783648. Folglich wird die Summe gleich seyn dieser Zahl doppelt genommen weniger 1; das ist 4294967295 Pfen. Wenn man mit Euler auf einen Groschen 12 Pfenninge, und auf einen Rthlr. 24 Groschen rechnet, so beträgt die Summe 14913080 Rthlr. 21 Gr. 3 Pf.

§. 77. Erkl. Wenn man unter eine geometrische Progreßion, die mit 1 anfängt, eine arithmetische schreibt, deren erstes Glied $=0$, und in den natürlichen Zahlen fortgehet, so sind diese letzte die Logarithmen von den ersten. Z. E.

1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.
0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.

Die erste Reihe ist eine geometrische, die zwote eine arithmetische Progreßion. 2 wäre der Logarithme von 4, und 6 wäre der Logarithme von 64 u. s. w.

§. 78.

§. 78. Zus. Man könnte auch die obige geometrische Reihe folgendergestalt schreiben.

$$1.\ 2^1.\ 2^2.\ 2^3.\ 2^4.\ 2^5.\ 2^6.\ 2^7.\ \text{u. s. w.}$$

Hieraus ist klar, daß der Logarithme eines Gliedes mit dem Exponenten von 2 des nämlichen Gliedes einerley in diesem Falle sey. Da nun jede andere geometrische Progreßion statt obiger gesetzt werden kann; z. B. 1. 3. 9. 27. u. s. w. so ist dieß auch allgemein wahr. Will man also den Logarithme der Zahl 2^5 wissen, so müßte man 2 fünfmal mit sich selbst multipliciren, und es würde $2^5 = 32$. Der Logarithme aber von der Zahl wäre der Exponent 5. Dieses pflegt man so zu bezeichnen $5 = l\ 32$; Es bedeutet dieser Ausdruck, daß 5 der Logarithme von 32 sey. Man setzt auch manchmal $5 = \log\ 32$, das denn eben derselbige Ausdruck ist. Da der Exponent eines Gliedes in der geometrischen Reihe mit dem Logarithme desselbigen Glieds einerley ist; so siehet man leicht die Ursache der Benennung ein, warum die ersten Erfinder obgedachte Exponenten Logarithmen genannt haben. Man betrachte z. E. das Verhältniß, $1:2$ und $1:2^5$; so muß, wenn letzteres entstehen soll, das erstere fünfmal mit sich selbst multiplicirt werden. Da nun der Exponent 5 diese Multiplication anzeigt, oder die Anzahl der Verhältnisse anzeigt, welche in einander multiplicirt worden; so

man diesen Exponenten aus dem Griechischen (λογων αριθμος) das auf deutsch die Zahl der Verhältnisse heißt, den Namen Logarithme gegeben.

§. 79. Anm. Die Logarithmen sind von Joh. Neper Baron von Marchiston erfunden worden; wie seine Mirifici canonis logarithmorum descriptio. Edinb. 1614 zeigt. Verschiedene, worunter auch Hr. Doctor Clemm, behaupten, daß sie schon Jost oder Jobst Byrge ein Mathematikus des Landgrafen von Hessen Cassel gekannt habe. S. Clemms Amoenit. acad. vom Jahre 1754 Fasc. I unter dem Titel: Memorabilia Germaniae literatae. Die Stelle des grossen Mathematikers Keppler in Tabul. Rudolph. C. 3. p. II; wo er diesen Jost Byrge eben in Rücksicht auf seine logarithmische Erfindung einen hominem cunctatorem, & secretorum suorum custodem, qui factum in partu destituit, & non ad vsus publicos educanit, nennet; diese Stelle giebt freylich der Behauptung, daß Byrge sie schon gekannt habe, ein grosses Gewicht. Da aber Byrge diese, wie seine andere Entdeckungen sehr geheim hielt; so ist wohl auch gewiß, daß Neper sie hernach von sich selbst erfunden hat. Benjamin Ursin ist unter den ersten gewesen, der sie den Deutschen bekannt gemacht. S. dessen Cursus Mathem. pract. Heinrich Brigg aber hat sie auf eine bequemme Art eingerichtet; so wie sie jetzt gebraucht werden. Die Logarithmen verschaffen in mathematischen Rech-

nungen

nungen die wichtigsten Vortheile. In der Trigonometrie wird sich dieses hauptsächlich zeigen; wo von ihrem Gebrauche auch weiterer Unterricht vorkömmt. Hier können nur die allgemeinsten Lehren abgehandelt werden. Da in neuern Zeiten die höhere Mathematik mit vielen Erfindungen ist vermehrt worden, so hat auch die Lehre von den Logarithmen grossen Zuwachs erhalten. Und aus den Schriften dieser Art kann man sich nur eine vollständige Kenntniß der Logarithmen erwerben. Man zeigt auch daselbst, wie sie auf leichtere Art können berechnet werden; denn die ersten Erfinder berechneten sie ungemein mühesam.

§. 80. Zus. Da folgende Reihe $1, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5$ u. s. w. eine geometrische Progreßion allgemein vorstellet, und also statt a jede Zahl wieder gesetzt werden kann; die Exponenten aber zugleich die Logarithmen sind, so ist offenbar, daß ein Logarithme unendlich vielen Zahlen zugehören kann. Ist aber a einmal bestimmt; so gehört der Logarithme nur zu einer Zahl. Z. E. wenn $a = 2$ genommen wird, so ist $a^5 = 2^5 = 32$ und also $5 = \log 32$. In den gewöhnlichen Tafeln hat man die geometrische Progreßion angenommen.

1.	10.	100.	1000.	10000.	100000.
0.	1.	2.	3.	4.	5.

Die Zahlen in der untern Reihe wären also

die

die Logarithmen. Durch unsägliche Mühe (ob man gleich jetzt Mittel hat, es leichter zu bewerkstelligen) hat man die Logarithmen aller Zahlen, die zwischen 1 und 10, zwischen 10 und 100 u. s. w. fallen, bis auf 10000 berechnet; und in grössern Tabellen ist man noch weiter gegangen. Alle die Logarithmen, welche zu Zahlen gehören, die zwischen 1 und 10 fallen, können keine ganze Zahlen seyn; und so auch die nicht, welche zwischen 10 und 100 enthalten sind u. s. f. Denn da 0 der Logarithme von 1 ist; so kann der Logarithme von 2 nicht auch 0, sondern er muß grösser seyn; doch kann er nicht eins seyn, denn 1 ist = log 10. Er muß folglich ein Bruch seyn, der dann in den Tafeln durch Decimaltheile ausgedrückt ist. Man findet selbigen in den Tabellen = 0. 3010300. Hier zeigt die vorgesetzte 0 an, daß der Logarithme nicht zu einer Zahl gehöre, die = 10, oder grösser als 10 wäre. Da man also aus diesem Anfange des Logarithmen erkennet, zwischen welche Zahlen die Zahl fallen muß, deren Logarithme gegeben ist; so hat man diese erste Zifer der Logarithmen, die Kennzifer (figura characteristica) genannt.

Hätte z. E. ein Logarithme zur Kennzifer 2; so würde man schließen können, daß die dazu gehörige Zahl zwischen 100 und 1000 fallen müsse. Ueberhaupt zeigt sich, daß alle Zahlen von 1 bis 10 die Charakteristik oder Kennzifer 0, die von 10 bis

100 die Charakteristik 1, die von 100 bis 1000 die Charakteristik 2, die von 1000 bis 10000 die Charakteristik 3 haben. Ferner ist klar, daß nur die Zahlen 1. 10. 100. 1000. 10000 u. s. w. vollkommen genaue und nach mathematischer Schärfe richtige Logarithmen haben. Alle übrige sind Decimalbrüche, oder ganze Zahlen mit angehängten Decimalbrüchen. In den gemeinen Tafeln sind die ersten 7 Decimalzifern von jedem vorhanden. Die letzte dieser Decimalzifern hat man um 1 vermehrt, wenn die erste der weggelassenen über 5 war. Ungeachtet die meisten Logarithmen nur beynahe wahr sind; so verursachen sie doch in astronomischen Rechnungen, oder sonst in der angewandten Mathematik keine merkliche Fehler. Denn die Fehler sind in der That so geringe, daß sie nirgends, als in der größten mathematischen Genauigkeit, den Namen eines Fehlers verdienen.

§. 81. Lehrs. Wenn zwo Zahlen miteinander multiplicirt werden; so ist der Logarithme des Products die Summe der Logarithmen der Factoren.

Z. E. Wenn man §. 77 nachsiehet, so ist $2 \times 16 = 32$. Das Product 32 hat den Logarithmen 5, der Logarithme des Factors 2 ist = 1 und der von 16 = 4, und also die Summe der Logarithmen von den Factoren, oder 4 + 1 ist = dem Logarithme des Products.

Bew.

Bew. Wenn a^2 mit a^3 multiplicirt wird, so ist das Product $a^{2+3} = a^5$. Nun ist 2 der Logarithme von a^2 und 3 der Logarithme von a^3 (§. 78.), 5 aber der Logarith. von a^5. Folglich ist der Logarithme des Products gleich der Summe der Logarithmen der Factoren.

§. 82. Zus. Wenn man logarithmische Tafeln hat, wo neben den Logarithmen die ihnen zugehörige Zahlen stehen, so kann man das Product zwoer Zahlen erhalten, wenn man ihre Logarithmen addirt, und die Summe in den Tafeln aufsucht. Die daneben stehende Zahl wird das Product seyn. Z. E. aus obigem Täfelchen §. 77 suchte man das Product aus 4×16; so addire man ihre Logarithmen $2 + 4 = 6$, diesen Logarithmen suche man daselbst, so findet man die Zahl 64 darüber stehen.

§. 83. Zus. Der Logarithme einer Potenz kömmt heraus, wenn man den Logarithme der Wurzel so vielmal nimmt, als der Exponent der Potenz anzeigt. Z. E. Man verlangte den Logarithmen des Quadrats von a oder von a^2; so wäre $2\,l\,a$ der Logarithme des Quadrats. Denn a ist die Wurzel und $l\,a$ der der Logarithme der Wurzel, und $2\,l\,a$ ist der Logarithme der Wurzel so vielmal genommen, als der Exponent anzeigt. Von der Wahrheit kann man sich leicht überzeugen. Denn da $a \times a = a^1 \times a$

$= a$

$= a^{1+1} = a^2$; nach §. 81 aber der Logarithme des Products der Summe der Logarithmen von den Factoren gleich ist; so wäre $\log a^2 = \log a + \log a = 2 \log a$.

Auf eben die Art erhellet, daß $\log a^3 = 3 \log a$ oder daß der Logarithme einer Cubikzahl gleich sey dem Logarithme der Wurzel dreymal genommen. Allgemein wäre $a^x = x \log a$. In Aufgaben, wo der Exponent einer Potenz gesucht wird, leisten die Logarithmen treffliche Dienste, das gesuchte sogleich (directe) zu erhalten. Z. E. $2^x = 8192$. Hier ist der Werth der Potenz 2^x bekannt; wenn man aber den Exponenten verlangte von $2^x = 8192$; so ist nach obigem allgemeinen Ausdruck $x \log 2 = l\,8192$, und beiderseits mit log 2 dividirt $x = \frac{l\,8192}{l\,2}$; sucht man die Logarithmen der Zahlen 8192 und 2 in den Tabellen auf; so ist $x = \frac{3{,}9133899}{0{,}3010300} = 12{,}99$. Dieser Quotient ist beynahe 13, und es ist auch x wirklich = 13; wie man dieses sehen kann, wenn man 2 auf die dreyzehnte Dignität erhebet. Daß aber 13 nicht selbst zum Quotienten herauskömmt, rühret daher, weil man nur mit Stücken der Logarithmen rechnet (§. 80.).

§. 84. Lehrs. Den Logarithme eines Quotienten erlangt man, wenn man den Logarithmen des

Di-

Divisors vom Logarithme des Dividendus abziehet.

Z. E. Wenn 64 durch 4 zu dividiren wäre, so ist der Quotient 16. Nun ist nach dem Täfelchen (§. 77.) vom Dividend der log = 6, vom Divisor = 2, vom Quotienten = 4. Aber 4 = 6 — 2.

Bew. Wenn a^5 durch a^3 zu dividiren ist; so ist der Quotient $= a^{5-3} = a^2$. Da nun 5 der log vom Dividend, und 3 vom Divisor, 2 aber vom Quotient (§. 78.) ist, hernach 2 = 5 — 3; so erhellet, daß der Logarithme des Quotienten = der Differenz des log des Dividendus und Divisors.

§. 85. Zus. Derohalben verschaffen die Logarithmen die Bequemlichkeit, daß wenn zwo Zahlen in einander dividirt werden, man nur ihre Logarithmen von einander subtrahirt. Wenn man dann die Differenz in der Tafel aufsuchet, so findet man daneben die Zahl stehen, welche der Quotient der beiden zu dividirenden Zahlen ist. Z. E. Es sey 1015 durch 29 zu dividiren; so sind ihre Logarithmen nach den gewöhnlichen Tabellen, die nach §. 80 gerechnet sind.

$$\begin{array}{lrcl} \log & 1015 & = & 3.0064660 \\ \log & 29 & = & 1.4623980 \\ \hline & & & 1.5440680 \end{array}$$

Sucht

Sucht man nun diesen Logarithme in den Tafeln auf; so ist er = 35, das auch wirklich der Quotient ist.

§. 86. Zus. Will man aus einer Zahl die Wurzel einer Potenz ziehen; so muß man den Logarithme der Zahl durch den Exponenten der Potenz, von der die Wurzel seyn soll, dividiren; der Quotient ist der Logarithme der gesuchten Wurzel.

Denn da aus a^2 die Wurzel $a^{\frac{1}{2}}$ ist, so ist $a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ log a (§. 83.). Hieraus zeigt sich, daß, um den Logarithme der Quadratwurzel zu finden, der Logarithme der Zahl durch den Exponenten 2 dividirt werden müsse. Verlangte man die Cubikwurzel, so ist $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ und $a^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log a$ (§. cit.), und es muß also hier ebenfalls der Logarithme der Zahl durch den Exponenten 3 dividirt werden, um den Logarithme der Wurzel zu bekommen. Es kann auf allgemeine Art gezeigt werden, daß man um den Logar. der Wurzel einer Potenz zu bekommen, mit dem Exponenten der Potenz den Logarithme der Zahl, von der die Potenz ist, dividiren müsse. Es ist nämlich $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ und $a^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m} \log a$.

Exempel. Wenn aus 512 die Wurzel gezogen werden sollte, so ist nach den Tabellen log 512 = 2.70927700. Man dividire ihn, um den Logarith-

me der Wurzel zu bekommen, durch 3; so entstehet 0.9030900. Sucht man diesen Logarithme in den Tabellen, so gehöret er zu der Zahl 8. Folglich ist 8 die Cubikwurzel aus 512.

§. 87. Zus. Die Logarithmen der eigentlichen Brüche sind negativ. Denn z. B. $\frac{1}{4} = \log 1 - \log 4$ (§. 84.). Nun ist log 4, welcher subtrahirt wird, größer als log 1, wovon subtrahirt wird. Es bleibt also noch etwas von log 4 übrig, wenn man abziehet, das noch abgezogen werden sollte, und derohalben negativ ist, oder das Zeichen — bekömmt. Der Beweis ist aber dieser. Es sey die Reihe Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, u. s. w. Oder allgemein $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^4}$, $\frac{1}{a^5}$, u. s. w. so kann diese Reihe auch so ausgedrückt werden. a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, a^{-5} u. s. w. Da die Exponenten negativ, und zugleich die Logarithmen der Glieder sind; so werden die Logarithmen der eigenthümlichen Brüche, wie gesagt, negativ, wenn die Logarithmen ganzer Zahlen und uneigentlicher Brüche positiv sind.

§. 88. Anm. Die Trigonometrie giebt fernere Nachricht von dem Gebrauche der Logarithmen, und den logarithmischen Tabellen.

VIII. Abschnitt.

Erste und leichteste Lehren von den Gleichungen in der Algebra.

§. 89. Erkl. Die Algebra ist eine Wissenschaft, welche unbekannte Größen aus gegebenen Eigenschaften derselben durch Gleichungen zu finden lehret.

§. 90. Erkl. Eine Gleichung (Aequatio) heißt ein doppelter Ausdruck einerley Größe, z. B. $3 \times 5 = 17 - 2$. Die Glieder einer Gleichung heißen die Theile, die mit + und − zusammenhängen; wie z. E. hier 3×5 und 17 und 2.

§. 91. Zus. Nach den arithmetischen Grundsätzen bleibt eine Gleichung noch; wenn man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens gleiches addirt, oder subtrahirt; durch gleiches multiplicirt oder dividirt; oder beides zu einerley Potenzen erhebt, oder gleiche Wurzeln ausziehet. Es sey z E.

$$5a - x = b$$
$$x = x \text{ add.}$$

$$5a = b + x$$
$$-b = -b \text{ subtrah.}$$

$$5a - b = x$$

Es sey $ax = 4b$; so ist beiderseits mit a dividirt $\frac{ax}{a} = \frac{4b}{a}$; oder $x = \frac{4b}{a}$

Ferner sey $\frac{x}{d} = 3ab$; so ist, wenn beiderseits mit d multiplicirt wird $\frac{x}{d} \times d = abd$ oder $x = 3abd$.

Wenn $\sqrt{x} = ab$; so ist, wenn man die Glieder beiderseits zum Quadrat erhebt $x = a^2 b^2$. Wäre $\sqrt[3]{y} = ab$, so wäre auch $y = a^3 b^3$.

Ist $x^2 = a$; so ist $\sqrt{x^2} = \sqrt{a}$ oder $x = \sqrt{a}$. Ist aber $y^3 = a$; so ist ebenfalls $\sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{a}$ oder $y = \sqrt[3]{a}$.

§. 92. Zus. Eine Gleichung kann $= 0$ werden, wenn man alle ihre Glieder mit dem entgegen gesetzten Zeichen auf eine Seite bringt.

Es sey in Zahlen die Gleichung gegeben: $12 - 3 = 6 + 5 - 2$; so ist, wenn beiderseits 2 hinzu addirt wird, $12 - 3 + 2 = 6 + 5$; und wenn beiderseits 6 subtrahirt wird, $12 - 3 + 2 - 6 = 5$; endlich, wenn auf beyden Seiten 5 subtrahirt wird $12 - 3 + 2 - 6 - 5 = 0$. Also sey allgemein $a^2 - ax = b + 5d$. Man bringe die Glieder b und

5 d

5 d mit den entgegen gesetzten Zeichen auf die andere Seite; so ist $a^2 - ax - b - 5d = 0$.

§. 93. Willkührl. Satz. Man pflegt die unbekannten Größen, die in Gleichungen vorkommen, mit den letzten Buchstaben des Alphabeths x, y, z zu bezeichnen; und die bekannten mit den ersten a, b, c u. s. w.

§. 94. Erkl. Eine einfache Gleichung heißt, in welcher die unbekannte Größe nicht höher als auf die erste Potenz steigt. Die unbekannte Größe muß aber nirgends ein Divisor seyn. Z. E. $x = a + b$ ist eine einfache Gleichung. Wäre $x = \frac{a+b}{x}$, so scheint es anfänglich, als wenn es auch eine einfache Gleichung wäre; man multiplicire aber beiderseits mit x, so entstehet $xx = a + b$. Folglich da die unbekannte Größe x von einer höhern Potenz, als der ersten ist; so ist es auch keine einfache Gleichung.

§. 95. Erkl. Die Coefficienten der unbekannten Größe, heißen die bekannten Größen, die in sie multiplicirt sind. Z. E. $12 = 3x$. Hier wäre 3 der Coefficient von x. Wenn $b = cy$, so ist c der Coefficient von y; weil c eine bekannte, y aber eine unbekannte Größe vorstellet (§. 93.).

§. 96. Zus. In einer einfachen Gleichung können eine, zwo, drey und mehrere Größen unbekannt

seyn. Bey allen kömmt es darauf an, daß man die unbekannte Größe auf eine Seite, und die bekannte auf die andere schaffe. Es ist dieses aus den Grundsätzen, die in der Arithmetik §. 25 angeführt worden, ziemlich leicht; und man lernt diese Kunst am besten aus Beyspielen. Derohalben wollen wir mit den einfachen Gleichungen anfangen, wo nur eine unbekannte Größe vorkömmt. Es fodern aber dergleichen Aufgaben, daß man die erste Gleichung richtig ausdrücke, und da hat man nöthig, alle Aufmerksamkeit anzuwenden, damit man nicht irre. Das Beyspiel, das Newton in Arithm. vniuersali gegeben hat, und das man gemeiniglich anzuführen pflegt, mag hier auch Platz finden; weil es ungemein deutlich ist. Statt Pf. Sterling will ich nur Gulden setzen. Es sey also:

§. 97. Aufg. Ein Kaufmann vermehrt sein Vermögen jährlich um den dritten Theil; nimmt aber jedes Jahr zu seiner Erhaltung 100 fl davon weg. Er wird nach dreyen Jahren noch einmal so reich, als er anfänglich war. Man fragt, wie viel hat er Vermögen?

Aufl. Wir wollen dieses Beyspiel anfangs in Worten, alsdann in Zeichen ausdrücken.

I. Ein Kaufmann hat ein gewisses Vermögen, das noch unbekannt ist.

II. Wovon er das erste Jahr 100 fl braucht.

III. Den Rest vermehret er um den dritten Theil.

IV. Das zweyte Jahr braucht er wieder 100 fl.

V. Den Rest vermehret er abermal um den dritten Theil.

VI. Im dritten Jahre braucht er wieder 100 fl.

VII. Den Rest vermehrt er nochmal um den dritten Theil.

VIII. Und ist noch einmal so reich, als er im Anfange war.

$$\text{I. } x$$

$$\text{II. } x - 100$$

$$\text{III. } x - 100 + \frac{x - 100}{3} = \frac{4x - 400}{3}$$

$$\text{IV. } \frac{4x - 400}{3} - 100 = \frac{4x - 700}{3}$$

$$\text{V. } \frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9} = \frac{16x - 2800}{9}$$

$$\text{VI. } \frac{16x - 2800}{9} - 100 = \frac{16x - 3700}{9}$$

$$\text{VII. } \frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27} = \frac{64x - 14800}{27}$$

$$\text{VIII. } \frac{64x - 14800}{27} = 2x$$

Dieses Beyspiel, ehe man rechnet, mag noch durch folgende Betrachtungen erläutert werden. Man wird, wenn man die Methode, wie dieses aufgelöset wird, deutlich einsiehet, desto eher in Stand gesetzt werden, die folgenden Aufgaben aufzulösen. Weil das Vermögen unbekannt ist; so ist es = x. Er braucht im ersten Jahr 100 fl, es wird das

Vermögen also um 100 fl geringer, oder $x - 100$, dieses ist zugleich der Rest. Da er nun den Rest des Vermögens um den dritten Theil des Rests vermehrt; so wird es $x - 100 + \frac{x-100}{3}$, oder wenn man diese Brüche unter eine Benennung bringt, $\frac{3x-300+x-100}{3}$ das dann zusammen $\frac{4x-400}{3}$ macht. Da er den Rest wieder mit dem dritten Theil desselben vermehrt; so ist selbiger $\frac{4x-400}{3} + \frac{4x-400}{9}$. Denn man muß $\frac{4x-400}{3}$ mit 3 wieder dividiren, um den dritten Theil zu bekommen. und dadurch entstehet $\frac{4x-400}{9}$. Wenn dieses letztere mit dem Rest $\frac{4x-400}{3}$ unter eine Benennung gebracht wird; so darf man nur Zähler und Nenner des ersten Bruchs mit 3 multipliciren. Er wird dadurch $\frac{12x-2100}{9}$. Wenn man nun den dritten Theil $\frac{4x-700}{9}$ hinzu addirt; so hat man $\frac{16x-2800}{9}$. Auf diese Art wird nun auch im folgenden verfahren. Da er zuletzt noch einmal so reich als vorher seyn soll, so muß $\frac{64x-14800}{27} = 2x$ seyn. Denn im Anfang war sein Vermögen nur x.

Da nun $\frac{64x-14800}{27} = 2x$; so ist wenn beyderseits mit 27 multiplicirt wird, $64x - 148000 = 54x$. Wenn man beiderseits 14800 addirt, $64x = 54x + 14800$; und wenn man beiderseits 54

x sub=

x subtrahirt, $64x - 54x = 14800$, oder $10x = 14800$; und beiderseits mit 10 dividirt $x = 1480$.

Die Probe, ob x recht gefunden sey, läßt sich leicht aus den Bedingungen der Aufgabe machen.

§. 98. Aufg. Aus den gegebenen Tagereisen zweener Bothen, und der Zeit, wie lange der erste weg ist, ehe der andere ihm nachgehet, zu finden, wenn er ihn einholet.

Aufl. Es sey des ersten Tagereise $= a$, des zweyten b; die gegebene Zeit, die der erste vor dem andern schon gegangen ist $= c$, die gesuchte Zeit vom Ausgang des zweyten Bothen an gerechnet $= x$. Man muß also erst suchen, was für einen Tag der erste Bothe in der Zeit zurück gelegt hat, ehe der andere ihm nachgehet. Man findet durch die Regel detri $1 : a = c : ac$. Nämlich man schließt: in 1 Tag gehet er a, was für einen Weg macht er in c Tagen; da findet sich das vierte Glied ac. Eben so findet man, daß dieser erste Bothe, den Weg ax zurück gelegt, während der Zeit, da ihm der andere nachgehet. Der ganze Weg, den er gegangen, ist deswegen $ac + ax$. Nach der Regel detri findet man aber auch, daß der andere Both, während der Zeit, daß er gehet, den Weg bx zurückgelegt, welcher des ersten Bothen Wege gleich seyn muß, weil er den letzten einholen soll. Es ist derohalben folgende Gleichung.

$$ac + ax = bx$$
$$ac = bx - ax$$
$$ac = (b - a)\,x$$
$$\frac{ac}{b-a} = x$$

In diesem Beyspiele wird beiderseits ax subtrahirt; alsdann der gemeinschaftliche Factor x abgesondert; endlich beiderseits mit $b-a$ dividirt.

Ex. Es sey $a=6$, $b=8$, $c=4$, so ist $x = \frac{6 \times 4}{8-6} = 12.$

Probe. In 12 Tagen legt der zweyte Bothe, da er jeden Tag 8 Meilen gehet $12 \times 8 = 96$ Meilen zurück. Der erste aber in $4 + 12 = 16$ Tagen, da er jeden Tag 6 Meilen gehet, $6 \times 16 = 96$ Meilen.

§. 99. Zus. Es könnte aus voriger Gleichung, wenn die Zeit des Einholens gegeben, und dagegen die Tagereise des zweyten Bothen gesucht wird, letztere gefunden werden. Es wird aber dienlich seyn, diese Frage besonders aufzulösen. Es sey also aus den gegebenen Tagereisen eines Bothen $= a$, und der Zeit, da er hinweg ist, $= b$ die Tagereise eines andern Bothen zu bestimmen $= x$, welcher dem ersten in einer gegebenen Zeit $= c$ einholen soll. Man fin-

findet hieraus wie in der vorigen Aufgabe die Gleichung.

$$ab + ac = cx$$

$$\frac{ab + ac}{c} = x$$

$$\frac{ab}{c} + a = x$$

Ex. Es sey $a = 6$, $b = 4$, $c = 12$; so ist $x = \frac{6 \times 4}{12} + 6 = 2 + 6 = 8$.

Probe. Der erste gehet jeden Tag 6 Meilen, also in 4 + 12 Tagen (4 + 12) 6 Meilen = 96 Meilen. Der andere soll aber den ersten in 12 Tagen einholen; er muß also 8 Meilen des Tags gehen, denn $12 \times 8 = 96$.

§. 100. Aufg. Aus der gegebenen Entfernung zweyer Oerter von einander, aus welcher zu gleicher Zeit zween Bothen weggehen, und der Tagreise eines jeden, die Zeit, in welcher sie einander begegnen, zu finden.

Aufl. Es sey die gegebene Entfernung beider Oerter von einander = a, die Tagreise des ersten Bothen = b, die Tagreise des andern Bothen = c, die gesuchte Zeit = x.

Man schließt hier wieder nach der Regel detri: in einem Tage gehet der erste Both b, was gehet er

für

für einen Weg in der Zeit x; oder $1 : b = x : bx$. Eben so findet man den Weg des andern, $1 : c = x : cx$. Folglich weil beide die ganze Weite der Oerter voneinander durchgereiset haben; so ist

$$bx + cx = a$$
$$x(b + c) = a$$
$$x = \frac{a}{b + c}$$

In diesen Gleichungen wird erstens der gemeinschaftliche Factor x abgesondert, alsdann beiderseits mit $b + c$ dividirt.

Ex. Es sey $a = 120$, $b = 6$, $c = 4$; so ist $x = \frac{120}{6 \times 4} = \frac{120}{10} = 12$. Sie begegnen also im zwölften Tage einander.

Probe. Beide müssen 120 Meilen gehen. Da nun der erste in einem Tage 6 Meilen gehet; so gehet er in 12 Tagen $6 \times 12 = 72$ Meilen; und da der andere jeden Tag 4 Meilen zurücklegt; so gehet er in 12 Tagen $4 \times 12 = 48$ Meilen. Aber $72 + 48 = 120$.

§. 101. Anm. Diese Aufgaben können noch auf andere Gegenstände angewandt werden. Z. E. die Aufgabe §. 98 könnte allgemein so ausgedrückt werden. Aus den Geschwindigkeiten zweener Körper, die sich gleichförmig bewegen, das ist, die in einerley Zeiten immer einerley Wege zurücklegen, und

aus

aus der Zeit, wie lange der erste vorausgelaufen ist, zu finden, wenn ihn der andere einholet. Maler in seiner Algebra §. 121 zeigt, wie aus diesen Aufgaben die Zusammenkunft der Sonne und des Mondes berechnet werden könne; wenn man es nur beyläufig zu wissen nöthig hat.

§. 102. Aufg. Es sind die Preise von der Maaß zwoer Arten von Wein gegeben. Man fragt, wie viel von jedem zu einer Maaß vermischten Weines muß genommen werden, die man für einem mittlern gegebenen Preis verkaufen will.

Aufl. Die Maaß des guten Weins = 1 gelte a, die Maaß des schlechtern = 1 gelte b, die Maaß des vermischten = 1 gelte c. In der Maaß des vermischten befinde sich vom schlechtern der Theil x; so ist der Theil des darinn enthaltenen guten 1 — x. Der Werth des schlechtern in der vermischten Maaß wird gefunden durch die Regel detri: 1 Maaß gilt b, was gilt der Theil x. Folglich ist dessen Werth bx. Eben so findet man den Werth des beßern. 1 : a = 1 — x. Folglich ist dessen Werth $(1 - x)\,a = a - ax$. Da diese beide Preise nun = c seyn sollen; so ist $bx + a - ax = c$. Beiderseits a subtrahirt $b - ax = c - a$. Aus dieser Gleichung würden nun beide Glieder negativ werden; weil a größer als b und als c ist. Man verändere deswegen alle Zeichen der Glieder in die entgegengesetzten; denn dadurch wird die Glei-

chung

chung nicht verändert; es wäre nämlich eben so viel, als ob man jedes Glied auf die entgegengesetzte Seite brächte. Es ist deswegen

$$-bx+ax=-c+a$$
$$ax-bx=a-c$$
$$(a-b)\,x=a-c$$
$$x=\frac{a-c}{a-b}$$

Ex. Wenn $a=16$, $b=10$, $c=12$; so ist $x=\frac{16-12}{16-10}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. Folglich muß des guten $\frac{1}{3}$ genommen werden.

Probe. Der vermischte Wein soll um 12 Kr. verkauft werden. Da vom schlechten $\frac{2}{3}$ genommen werden soll, und die Maaß 10 Kr. gilt, so ist der Preis von $\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\times 10=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}$ Kr. Der Preis von dem Theile des guten, der zum vermischten genommen werden soll, ist $=\frac{1}{3}\times 16=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}$. Beide Theile machen eine Maaß, und ihr Preis ist $=12$ Kr.

§. 103. Zus. Diese Aufgabe lehrt überhaupt zwey Dinge vom gegebenen Werthe so vermischen, daß ein gegebener mittlerer Werth herauskömmt. Sie wird beym Münzwesen und Silberarbeiten,

auch

auch Zinngießen mit vielem Nutzen gebraucht, und die Regula alligationis genannt. S. Schlüters Unterricht von Hüttenwerken. Zum Beyspiel führt Kästner Analys. endlicher Größen §. 69 folgendes an: Es sey fünfzehnlöthiges und neunlöthiges Silber so zu vermischen, daß dreyzehnlöthiges herauskomme. Weil eine Mark = 16 Loth; so ist fünfzehn löthiges Silber $\frac{15}{16}$ einer Mark, und neunlöthiges $\frac{9}{16}$ und dreyzehnlöthiges $\frac{13}{16}$. Folglich ist hier $a = \frac{15}{16}$ $b = \frac{9}{16}$, $c = \frac{13}{16}$; und x oder die Menge des schlechten Silbers, das man zur Vermischung nehmen muß, wird $\frac{15-13}{16} : \frac{15-9}{16} = \frac{15-13}{15-9} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, und folglich muß des bessern $\frac{2}{3}$ genommen werden. Daß man recht gerechnet, und das gesuchte gefunden habe, kann man daraus abnehmen; wenn man überlegt, daß $\frac{2}{3}$ einer Mark fünfzehn löthiges Silber $= \frac{2}{3} \times \frac{15}{16} = \frac{10}{16}$ feines Silber sey, und daß $\frac{1}{3}$ einer Mark neunlöthiges Silber $= \frac{1}{3} \times \frac{9}{16} = \frac{3}{16}$. Es halten also die beiden Silber zusammen $\frac{10+3}{16}$ fein Silber, welches verlangt wurde.

Weil man aber in Münzstätten die Mark nicht in Drittheile eintheilet, und dergleichen Gewichte nicht immer vorhanden sind, die nach der Rechnung müßten genommen werden; auch überdas solche Vermischungen nur im Großen daselbst pflegen gemacht zu werden; so würde auch hier vielleicht ein Münzmei-

ster

ster 2 Mark vom schlechten neunlöthigen, und 4 Mark vom beßern fünfzehnlöthigen nehmen, um eine Vermischung vom Silber zu machen, das dreyzehn löthig wäre. Denn es ist 2 : 4 = $\frac{1}{3}$: $\frac{2}{3}$. Diese Mengen kämen wenigstens nach der Methode heraus, deren sich meines Wissens insgemein Münzverständige zu bedienen pflegen. Sie setzen das gute und schlechte untereinander, und das vom mittlern Werthe neben beide; sie ziehen das vom mittlern Werthe vom guten ab, die Differenz giebt die Menge des schlechten, das genommen werden muß. Eben so ziehet man das schlechte vom mittlern ab, und die Differenz giebt die Menge des zu nehmenden guten. Z. E.

13 Löthiges	15 Löthiges	4 vom beßern
	9 Löthiges	2 vom schlechtern

Uebrigens siehet man leicht, daß auch nur eine Mark schlechters und 2 Mark gutes könnten genommen werden. Denn 1 : 2 = 2 : 4. Es ist auch nicht nöthig, daß es Mark wären; es könnten Loth seyn, wenn man nicht Silber in grosser Quantität vorräthig hätte.

Wir wollen noch folgendes Beyspiel hieher setzen. Es seyen 10 Ducaten vorhanden, davon einer 5 fl gilt, und 10 andere, wovon einer 4 fl gilt. Die ersten sind also 50 fl, die andern 40 fl werth. Man verlangt aus beiden 10 andere Ducaten zu machen,

chen, derer einer $4\frac{1}{2}$ fl werth ist. Diese 10 betragen also 45 fl; so wäre nach obiger Art zu rechnen

45	50	5 von guten
	40	5 von schlechtern.

In der That betragen auch 5 gute, wo einer 5 fl gilt, und 5 schlechte, wo einer 4 fl gilt, 45 fl am Werth. Hätte man von jeder Sorte nur eine, und man wollte wissen, was für einen Theil man von jeder nehmen müßte; so wäre die Rechnung

$4\frac{1}{2}$	5	$\frac{1}{2}$ von den beßern
	4	$\frac{1}{2}$ von den schlechtern.

Beyspiele ähnlicher Art wird man aus diesem leicht selbst berechnen können. In Johann Michael Schwarzers vollständigem kaufmännischem Rechenbuch ist S. 397 die Alligationsrechnung vorgetragen. Man findet daselbst Beyspiele aller Art. Auch sind Rechnungen enthalten, wenn mehr als 2 Dinge miteinander vermischt werden sollen, derer Grund ein geübter Mathematiker bald einsehen wird.

§. 104. Aufg. Eine Zahl zu finden, daß, wenn 9 hinzuaddirt, und diese Summe mit 5 dividirt wird, 13 herauskomme.

Aufl. Die Zahl sey $= x$; so ist wenn 9 hinzu addirt und mit 5 dividirt wird, $\frac{x+9}{5} = 13$. Und

wenn beiderseits mit 5 multiplicirt wird $x + 9 = 65$, und 9 beiderseits subtrahirt $x = 65 - 9 = 56$.

§. 105. Aufg. Es werden drey zu Erben eingesetzt: der andere soll doppelt so viel bekommen, als der erste, und der dritte dreymal so viel als der erste. Das ganze Vermögen beträgt aber 18000 fl wie hoh beläuft sich der Antheil eines jeden?

Aufl. Es sey der Theil, den der erste bekommen soll, $= x$; so ist der Theil des andern $= 2x$, der Theil des dritten $= 6x$. Alle diese 3 Theile sind nun so groß, als die ganze Erbschaft; oder $x + 2x + 6x = 18000$, oder $9x = 18000$, oder $x = \frac{18000}{9} = 2000$. Also bekömmt der erste 2000 fl, der andere 4000, der dritte 12000 fl.

§. 106. Aufg. Eine Zahl zu finden, deren Hälfte, Drittheil und Viertheil um eins mehr macht, als die Zahl selbst.

Aufl. Die gesuchte Zahl ist $= x$, und folglich nach der Aufgabe $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = x + 1$. Oder wenn man diese Brüche unter eine Benennung bringt,

$$\frac{12x}{24} + \frac{8x}{24} + \frac{6x}{24} = x + 1.$$

$$\frac{26}{24} x = x + 1.$$

$$26x = 24x + 24$$

$$26x - 24x = 24$$

$$2x = 24$$

$$x = \frac{24}{2} = 12.$$

In

In diesen Gleichungen wird erstlich wirklich addirt, zweytens beiderseits mit 24 multiplicirt, drittens 24 x beiderseits subtrahirt, und kürzer ausgedrückt; endlich beiderseits mit 2 dividirt.

§. 107. Anm. Die Regula falsi, deren gemeiniglich in Rechenbüchern gedacht wird, kann man durch solche algebraische Auflösungen entbehren.

Z. E. Es sey 100 in drey Theile zu theilen, daß der erste Theil dreymal so groß als der andere, und der andere zweymal so groß als der dritte werde. Nun setzt man, der kleinste Theil sey = 2; so ist der folgende = 3 × 2 = 6 und der dritte = 2 × 6 = 12. Nun sind aber die drey Theile 2 + 6 + 12 = 20 und nicht 100. Folglich ist das angenommene falsch. Es wird sich aber 100 zu seinem kleinsten Theil verhalten, wie 20 zu seinen kleinsten Theil, das ist $20 : 2 = 100 : \frac{2 \times 100}{20} = 10$. Das wird also der gesuchte Theil nach der Regula falsi seyn. Algebraisch wäre dieses Exempel, wie auch alle andere kürzer aufgelöset. Es wäre hier $x + 3x + 6x = 100$ oder $10x = 100$; und $x = 10$.

§. 108. Aufg. Ein Lehrmeister hat so viel Schüler, daß wenn ihm einer zu Erkaufung eines Gartens 5 fl giebt, so hat er 42 fl zu wenig, giebt ihm aber einer 6 fl, so hat er 58 fl zu viel. Wie viel sind der Schüler gewesen, und wie theuer hat er den Garten gekauft?

Aufl. Die Anzahl seiner Schüler sey = x. Giebt jeder 5 fl, so geben alle zusammen 5 x; folglich kostet der Garten 5 x + 42 fl. Giebt jeder 6 fl, so geben alle zusammen 6x, und der Garten kostet 6x—58 fl. Daher ist 5 x + 42 = 6 x — 58; beiderseits 5 x subtrahirt 42 = x — 58, beiderseits 58 addirt 42 + 58 = x oder 100 = x.

Probe. Da es 100 Schüler gewesen, deren jeder 5 fl gab, so gaben alle zusammen 500 fl, und das war um 42 fl zu wenig. Folglich kostete der Garten 542 fl. gab einer 6 fl, so gaben alle zusammen 600 fl, und das war um 58 fl zu viel; daher kostete der Garten 542 fl.

§. 109. Zus. Diese Aufgabe läßt sich allgemein auflösen. Man setze a statt 5, b anstatt 6, c anstatt 42, d anstatt 58; so hat man

$$ax + c = bx - d$$
$$c = bx - d - ax$$
$$c + d = bx - ax$$
$$c + d = (b - a)\,x$$
$$\frac{c + d}{b - a} = x.$$

In diesen Gleichungen wird erstens ax beiderseits subtrahirt, zweytens d auf beiden Seiten addirt, drittens der gemeinschaftliche Factor x abgeson-

sondert, viertens beiderseits mit $b-a$ dividirt, der letzte als ein allgemeiner Satz läßt sich leicht in Worten ausdrücken.

§. 110. Aufg. Wenn zwo Gleichungen gegeben, worinn zwo unbekannte Größen enthalten sind, diese letztere zu finden.

Aufl. Wenn zwo Größen unbekannt sind, so müssen auch zwo Gleichungen gegeben seyn, wo dann jede unbekannte Größe gefunden werden soll. Denn aus einer läßt sich nur die Summe, die Differenz, das Product oder der Quotient der unbekannten zwo Größen finden. Z. E. $x-a=y$, also $x-y=a$. Man weiß aber hier nicht, wie groß x und y sey, ob man schon ihre Differenz erhält. Eben so, wenn $x=\frac{y}{a}$; so ist $ax=y$ und $a=\frac{y}{x}$. Hier weis man den Quotienten, man weis aber wieder nicht, wie groß x und y u. s. w.

Sind also zwo Gleichungen I. $x+y=a$; II. $3x-y=b$ gegeben, so kann der Werth von x und y nach folgender Methode gefunden werden. Man suche den Werth einer unbekannten Größe aus einer Gleichung, z. E. aus I wird $x=a-y$. Diesen Werth setze man in der andern Gleichung statt des Buchstabens x. Man nennet dieses Verfahren die **Substitution**. Wenn man also in II statt x seinen

Werth $a - y$ setzt, so wird selbige $3a - 3y - y = b$. In dieser Gleichung ist jetzt nur ein unbekannter Buchstaben und sie läßt sich auflösen. Es ist nämlich $3a - 4y = b$ und $3a - b = 4y$, also $\frac{3a - b}{4} = y$. Hieraus läßt sich nun auch x finden, denn es ist $x = a - y$. Da nun der Werth von y bekannt ist; so darf man ihn nur an seine Stelle setzen. Es wird alsdann $x = a \frac{3a + b}{4}$. Die Zeichen müssen hier in die entgegengesetzten verwandelt seyn, weil y von a subtrahirt werden soll. Und wenn man a mit dem Bruch zu einer Benennung bringt, so wird $x = \frac{4a - 3a + b}{4} = \frac{a + b}{4}$

Der zweyte Weg, diese unbekannte Größen zu finden, bestehet darinn. Man suche aus jeder der beiden Gleichungen I. $x + y = a$; II. $3x - y = b$; den Werth eines Buchstabens z. E. von x; so wird I. $x = a - y$ und II. $3x = b + y$, und $x = \frac{b + y}{3}$

Da also $x = a - y$ und $x = \frac{b + y}{3}$, so ist

$$a - y = \frac{b + y}{3}$$

$$3a - 3y = b + y$$

$$3a = b + 4y$$

$$3a - b = 4y$$

$$\frac{3a - b}{4} = y.$$

In

In diesen Gleichungen wird beiderseits mit 3 multiplicirt, 3 y addirt, b subtrahirt, endlich mit 4 dividirt. Solchergestalt ist y, wie vorher, gefunden worden. Und daraus ergiebt sich auf die nämliche Art wie vorher $x = \frac{a + b}{4}$. Folgende Beyspiele werden die Sache deutlicher machen.

§. 111. Aufg. Zwo Zahlen zu finden, daß, wenn man von der ersten 1 hinwegnimmt, und zu der andern setzt, sie gleich seyen; nimmt man aber von der andern eins weg, und setzt es zu der ersten; so ist diese doppelt so groß als die zweyte.

Aufl. Die erste sey x, die andere y; so sind wenn man von der ersten 1 wegnimmt, und zu der andern setzt, beide gleich; oder I. $x - 1 = y + 1$. Nimmt man von der andern eins weg, so ist selbige $y - 1$ und die erste $x + 1$. Da aber nach der Aufgabe die erste doppelt so groß ist, als die andere; so wird man eine Gleichung machen können, wenn man $y - 1$ zweymal nimmt. Es ist alsdann II. $x + 1 = 2y - 2$. Aus der ersten wird $x = y + 2$; diesen Werth von x in der andern Gleichung substituirt giebt $y + 2 + 1 = 2y - 2$; oder $y + 3 = 2y - 2$. Folglich wenn y beiderseits subtrahirt wird $3 = y - 2$ und beiderseits 2 addirt $3 + 2 = y$. Da nun $x = y + 2$; so wird $x = 5 + 2$. Die beiden Zahlen sind daher 5 und 7. Nimmt

 man

man 1 von 7 und setzt es zu 5, so wird 6 = 6; und nimmt man 1 von 5, und setzt es zu 7; so entstehet 8 und 4. Es ist aber 8 das doppelte von 4.

§. 112. Aufg. Ein Herr nahm einen Bedienten unter der Bedingung, daß er ihm jeden Tag, an dem er nicht arbeiten würde, 6 Groschen bezahlen wollte, daß aber der Bediente jeden Tag, an dem er arbeitete, 4 Groschen zurück bezahlen sollte. Nach 30 Tagen hatte der Herr nichts vom Bedienten zurück erhalten, auch der Bediente nichts vom Herrn verdient. Es wird die Anzahl der Tage gesucht, an welchen der Bediente gearbeitet, und gefeiert hat.

Aufl. Es sey die Anzahl der Arbeitstage = x und die Anzahl der Tage, an welchen der Bediente gefeiert = y; weil beide zusammen 30 ausgemacht, so ist x + y = 39. Da er jeden Arbeitstag 6 Groschen bekommen hat; so beträgt dieses in x Tagen 6x; und da er jeden Tag, an welchem er nicht gearbeitet, 4 Groschen dem Herrn zurückbezahlt, so beträgt dieses in y Tagen 4 y. Weil auch keiner vom andern etwas erhalten hat; so muß die Summe Gelds, das der Bediente vom Herrn erhalten hat, so groß gewesen seyn, als die Summe, die er dem Herrn zurück gegeben hat. Oder es muß 6 x = 4 y seyn. Aus der ersten Gleichung wird nun x = 30 — y. Wenn man den Werth davon in der andern

sub-

substituiret, so wird selbige $= 180 - 6y = 4y$ und beiderseits $6y$ addirt $180 = 4y + 6y = 10y$. Beiderseits mit 10 dividirt $18 = y$. Daraus findet sich $x = 12$.

§. 113. Aufg. Es wird die Summe zwoer Zahlen und ihre Differenz gegeben, man sucht die Zahlen selbst.

Aufl. Es sey x die größere, y die kleinere Zahl, S die Summe, und d die Differenz; so ist I. $x + y = S$. II. $x - y = d$. Aus der ersten Gleichung ist $x = S - y$. Wenn man den Werth davon in der andern substituirt, so wird $S - 2y = d$; oder $S - d = 2y$ und $\frac{S-d}{2} = y$. Folglich die größere $x = S - \frac{S+d}{2}$ oder unter eine Benennung gebracht $\frac{2S - S + d}{2} = x$ oder $\frac{S+d}{2} = x$.

§. 114. Zus. Diese Aufgabe hat in der Trigonometrie ihren Nutzen, und sie heißt in Worten: Wenn man zu der halben Summe zwoer Zahlen die halbe Differenz addirt; so kömmt die größere Zahl heraus Wenn man von der halben Summe die halbe Differenz subtrahirt, so kömmt die kleinere Zahl heraus. Bey den obigen Gleichungen hätte noch ein besonderer Vortheil statt gefunden, da nämlich $x + y = S$, und $x - y = d$, so dürfte man

nur addiren; so wäre $2x = S + d$ und folglich $x = \frac{S + d}{2}$, daraus dann y kann gefunden werden.

Es sey z. E. die Summe = 17, die Differenz = 13; so wäre $x = \frac{17 + 13}{2} = 15$, und $y = \frac{17 - 13}{2} = 2$.

§. 115. Aufg. Es sey Gold, von dem die Unze 8 fl gilt, mit Silber, von dem die Unze 4 fl gilt, so zu vermischen, daß man 10 Unzen bekomme, von dem eine 6 fl werth ist. Wie viel Unzen Golds, und wie viel Unzen Silbers muß man nehmen?

Aufl. Es sey die Anzahl der Unzen Golds, die genommen werden müssen = x, des Silbers = y; so ist I. $x + y = 10$; da nun die Unze Golds 8 fl kostet, so kosten x Unzen 8 x; und da die Unze Silber 4 fl kostet; so kosten y Unzen 4 y. Die 10 Unzen von der Vermischung sind also 60 fl werth; oder es ist II. $8x + 4y = 60$. Aus der ersten Gleichung ist $x = 10 - y$. Dieses in der andern substituirt, wird

$$80 - 8y + 4y = 60$$
$$80 - 4y = 60$$
$$80 - 60 = 4y$$
$$20 = 4y$$
$$\frac{20}{4} = 5 = y$$

x ist daher ebenfalls = 5.

§. 116. Zus. Es hätte auch diese Aufgabe nach der Alligationsregel §. 103 gerechnet werden können.

6	8 Gold	2 Gold
	4 Silber	2 Silber

Hieraus siehet man, daß von jedem gleichviel genommen werden muß. Also zu 10 Unzen 5 Unzen Golds, und 5 Unzen Silbers. Man könnte es auch, wenn es ungleiche Zahlen wären, nach der Regel detri finden, wie viel zu einem gegebenen Gewicht genommen werden muß. Z. E. Die 2 Unzen Golds und 2 Unzen Silbers machen zusammen eine Vermischung von 4 Unzen. Man schließt also: zu 4 Unzen Vermischung, deren eine 6 fl werth ist, müssen 2 Unzen Golds genommen werden, zu 10 Unzen Vermischung, wie viel Gold muß da genommen werden? Oder $4 : 2 = 10 : \frac{2 \times 10}{4} = 5$.

§. 117. Aufg. Wenn 3 Gleichungen gegeben sind, worinn 3 unbekannte Größen enthalten sind, dieser Größen ihren Werth zu finden.

Aufl. Wenn man wie in §. 110 verfährt, so zeigt sich, daß, um drey unbekannte Größen zu finden, auch nicht weniger als drey Gleichungen gegeben seyn müssen. Ueberhaupt müssen allezeit so viele Gleichungen gegeben seyn, als unbekannte Größen gesucht werden. Auch wenn drey unbekannte Größen vorkommen, so bedient man sich der nämlichen Art,

sel-

selbige zu finden, wie vorher §. cit. Hieraus ist offenbar, auf welche Manier zu verfahren sey, wenn mehr als drey unbekannte Größen vorkommen.

Es seyen also folgende Gleichungen gegeben, I. $x + y = a$. II. $x + z = b$. III. $y + z = d$, so suche man den Werth von einem Buchstaben in I, und da wird $x = a - y$. Dieses substituire man in einer der andern, so wird II. $a - y + z = b$. Hieraus suche man wieder den Werth eines unbekannten Buchstabens; z. E. aus II. wird $z = b - a + y$, dieses substituire man in III, so ist $y + b - a + y = d$, oder $2y = d + a - b$ und $y = \frac{d + a - b}{2}$. Dadurch findet sich auch in II das z und in I das x.

Oder man verfährt so: Aus I. suche man den Werth von x und auch aus II. Es ist alsdann I. $x = a - y$. II. $x = b - z$; folglich $a - y = b - z$. Nun suche man hieraus wieder einen Buchstaben; z. E. z und es wird $z = b - a + y$. Aus III ist aber $z = d - y$, folglich wieder

$$b - a + y = d - y$$
$$2y = d - b + a$$
$$y = \frac{d - b + a}{2}$$

Exempel. Eine Mutter hatte drey Söhne, der

erste

erste und dritte waren zusammen 24 Jahr alt, der erste und andere 18 Jahre, der andere und dritte 22.

Es sey das Alter des ersten $= x$, des andern $= y$, des dritten $= z$; so ist I. $x + z = 24$. II. $x + y = 18$. III. $y + z = 22$. Aus I ist $x = 24 - z$; dieses in II substituirt, so wird $24 - z + y = 18$. Hieraus wird wieder $z = 24 + y - 18 = 6 + y$. Dieses in III gesetzt, erhält man $y + 6 + y = 22$; oder $2y + 6 = 22$; oder $2y = 22 - 6 = 16$, und endlich $y = \frac{16}{2} = 8$. Da nun $z = 6 + y$, so ist $z = 6 + 8 = 14$; und da $x = 24 - z$, so ist $x = 24 - 14 = 10$.

§. 118. Erkl. Eine Aufgabe ist bestimmt, (problema determinatum), wenn für sie so viele verschiedene Gleichungen gegeben sind, als bey derselben unbekannte Größen vorkommen. Alsdann kann man nämlich aus allen diesen Gleichungen eine einzige machen, wo nur eine unbekannte Größe vorkömmt, und deren Werth sich finden läßt. Sind aber weniger Gleichungen, als unbekannte Größen vorkommen, gegeben; so ist die Aufgabe unbestimmt. Z. E. Man sucht zwo Zahlen, die zusammen 30 ausmachen. Da wären $x + y = 30$. Hier könnte man für x, 1 und für y, 29 setzen; ferner für x könnte man 2 und für y, 28 setzen, und so noch unendlich viele Zahlen, die alle 30 zusammen ausmachten

machten. Eine weitere Untersuchung dieser Aufgaben kann in diesen Anfangsgründen nicht vorgetragen werden.

IX. Abschnitt.

Die Quadratischen Gleichungen, oder die Gleichungen vom zweyten Grade.

§. 119. Erkl. Eine höhere Gleichung ist die, in welcher die unbekannte Größe auf eine höhere Potenz als auf die erste erhoben ist. Z. B. $x^2 = 16$, $x^3 = 27$. Der Grad der Gleichung wird durch die Potenz der unbekannten Größe bestimmet. Ist die Potenz der unbekannten Größe ein Quadrat, oder ist sie von der zwoten Potenz, so ist die Gleichung vom zweyten Grade. Ist die Potenz der unbekannten Größe ein Cubus, oder von der dritten Potenz, so ist die Gleichung auch vom dritten Grade, u. s. w.

§. 120. Erkl. Eine reine Gleichung (Aequatio pura) ist diejenige, in welcher sich bloß die höhste Potenz der unbekannten Größe befindet. Z. E. $x^2 = a$ wäre eine reine quadratische Gleichung, $x^3 = b$ eine reine cubische. Eine unreine Gleichung (aequatio adfecta) ist die, worinn sich außer der höhsten Potenz der unbekannten Größe, auch

auch dabey noch niedrigere befinden. Z. E. $x^2+ax = b$ wäre eine unreine quadratische. $x^3 + ax^2 + bx = g$ wäre eine unreine cubische. Die Wurzel (radix) einer Gleichung heißt der Werth der unbekannten Größe in einer solchen Gleichung. Die Wurzel finden heißt die Gleichung auflösen.

§. 121. Aufg. Eine reine quadratische Gleichung aufzulösen.

Aufl. Es sey $x^2 = a$; so ist $x = \pm \sqrt{a}$. Hier bekömmt die Wurzel zween Werthe, und dieses zeigen die übereinander gestellten Zeichen $\pm$ an. Denn es sey, $x^2 = 16$; so ist $x = 4$. Es kann aber die Wurzel auch -4 seyn; denn $-4 \times -4 = 16$.

§. 122. Aufg. Eine Zahl zu finden, deren Doppeltes und Quadrat einander gleich sind.

Aufl. Es ist also $x^2 = 2x$. Hier findet der besondere Vortheil statt, daß man beiderseits mit x dividiren kann, und es wird $x = 2$. Unter allen ganzen Zahlen ist 2 die einzige, welche die verlangte Eigenschaft hat. Unter Brüchen giebt es noch mehrere, die das Verlangte leisten. Der bekannte alte Rechenmeister Adam Riese soll, wie Schwenter meldet, diese Eigenschaft der Zahl 2 in einer geheimnißvollen Gestalt gesetzt, und zu seinen Symbolum gebraucht haben.

§. 123. Aufg. Aus der gegebenen Differenz, und dem Produkt zwoer Zahlen die Zahlen selbst zu finden.

Aufl. Die Differenz sey $= a$, das Product $= b$, die halbe Summe $= x$; so ich nach §. 114.

Die grössere Zahl $x + \frac{1}{2}a$
Die kleinere Zahl $x - \frac{1}{2}a$

$$x^2 + \frac{1}{2}a$$
$$- \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a^2$$

Folglich ist das Product $= x^2 - \frac{1}{4}a^2 = b$

$$x^2 = b + \frac{1}{4}a^2$$
$$x = \surd(b + \tfrac{1}{4}a^2)$$
$$x = \surd\left(\frac{4b + a^2}{4}\right)$$

Aus dem Nenner kann die Wurzel gezogen werden; und so wird $x = \frac{1}{2}\surd(4b + a^2)$.

Ex. Es sey $a = 12$, $b = 28$; so ist $a^2 = 144$; und $x = \frac{1}{2}\surd(4 \times 28 + 144) = \frac{1}{2}\surd 256$. Aus 256 ist aber die Wurzel $= 16$; und also die Hälfte $= 8$. Deswegen ist die grössere Zahl $x + \frac{1}{2}a = 8 + 6 = 14$, und die kleinere $x - \frac{1}{2}a = 8 - 6 = 2$.

§. 124. Aufg. Eine unreine quadratische Gleichung aufzulösen.

Aufl.

Anfl. Es sey $x^2 + px = q$, wo p und q bekannte Größen sind. Man addire auf beiden Seiten das Quadrat vom halben Coefficienten von x; oder das Quadrat von $\frac{1}{2}p$. Da nun das Quadrat von $\frac{1}{2}p = \frac{1}{4}p^2$; so ist $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2$. Wenn man aber aus $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2$ die Wurzel ziehet, welches in diesem Falle allemal geschehen kann; so ist selbige $x + \frac{1}{2}p$. Folglich $x + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$ und $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$.

Daß man auf diese Art, wenn zu $x^2 + px$ das Quadrat des halben Coefficienten von x hinzuaddirt wird, ein vollständiges Quadrat erhält, woraus die Wurzel gezogen werden kann; ist aus dieser Betrachtung offenbar. Jedes Quadrat einer zweytheilichten Wurzel bestehet aus dem Quadrat des ersten Theils, dem doppelten Product aus dem ersten in den andern Theil, und aus dem Quadrate des andern Theils, oder von $a + b$ ist das Quadrat $a^2 + 2ab + b^2$ (§. 19.). Man setze also a sey $= x$, so ist $a^2 = x^2$ und $2ab$ sey $= px$, so ist $2b = p$. Folglich $b = \frac{1}{2}p$. Es muß also der dritte Theil b^2, der noch zu einem vollständigen Quadrat fehlt, $= \frac{1}{4}p^2$ seyn.

Wäre das zweyte Glied negativ, oder $x^2 - px = q$; so erhielte man $x^2 - px + \frac{1}{4}p^2 =$

$q + \frac{1}{4} p^2$ und die Wurzel beiderseits ausgezogen $x - \frac{1}{2} p = \pm \sqrt{(q + \frac{1}{4} p^2)}$.

Aus diesem giebt sich nun die Regel, solche Gleichungen aufzulösen: Man addire das Quadrat des halben Coefficienten von x auf beiden Seiten hinzu. Die Wurzel aus dem vollständigen Quadrate ist die unbekannte Größe, und der halbe Coefficient von x. Es wird aber dieser zweyte Theil der Wurzel alsdann zu x hinzu addirt, wenn p x das Zeichen + hat; er wird subtrahirt, wenn p x das Zeichen — hat.

Uebrigens ist noch zu bemerken; wenn das Quadrat der unbekannten Größe in bekannte Größen multiplicirt ist, müssen solche erst weggeschaft werden, ehe man die Gleichung auflöset. Es kann dieses geschehen, wenn man alle Glieder der Gleichung mit dieser bekannten Größe dividirt. Z. B. Es sey $3x^2 + 5x = 20$; so ist $x^2 + \frac{5}{3} x = \frac{20}{3}$.

Oft ist auch nöthig, daß man die Gleichung erst reducirt; das heißt, daß man einerley Glieder, welche bekannte und unbekannte Größen enthalten, jede auf eine Seite bringt, ehe man die Gleichung auflösen kann. Z. E. $3ax^2 - ab^2 + bx^2 = cx - bx$. Da würde, wenn man alle Glieder, die x enthalten, auf eine Seite, und die bekannten Glieder auf die andere Seite brächte, so wäre

$$3ax^2 + bx^2 + bx - cx = ab^2$$

Und wenn man die gemeinschaftlichen Factoren absonderte, so würde

$$(3a+b)x^2 + (b-c)x = ab^2$$

Nunmehr kann man den Coefficienten des ersten Glieds durch die Division wegschaffen, und es entstehet

$$x^2 + \left(\frac{b-c}{3a+b}\right)x = \frac{ab^2}{3a+b}$$

Endlich, wenn man sich überzeugen will, daß $x + \frac{1}{2}p$ die Wurzel aus $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2$ sey; so darf man nur die Wurzel durch sich selbst multipliciren, und die Wahrheit des Satzes wird sich leicht zeigen.

§. 125. Aufg. Eine Zahl zu finden, daß, wenn ihr vierfaches von ihrem Quadrate abgezogen würde, die Differenz 21 sey.

Aufl. Die Gleichung ist $x^2 - 4x = 21$. Man addire beiderseits das Quadrat des halben Coefficienten von x, so ist

$$x^2 - 4x + 4 = 21 + 4$$

und $x - 2 = \pm\sqrt{(21+4)}$

$$x = 2 \pm \sqrt{25} = 2 \pm 5.$$

Die gesuchte Zahl ist also entweder 7 oder -3.

Probe. Das Quadrat von $7 = 49$ und $4 \times 7 = 28$ davon abgezogen läßt 21 übrig. Eben so ist das Quadrat von $-3 = 9$, und das vierfache -12. Ziehet man dieses ab, so muß das Zeichen in das entgegengesetzte verwandelt werden, und es wird $9 + 12 = 21$ wie vorher.

§. 126. Aufg. Eine Zahl zu finden, daß, wenn man 42 dazu addirt, das Quadrat der Zahl entstehe.

Aufl. Da $x^2 = x + 42$ seyn soll; so ist $x^2 - x = 42$. In diesem Falle hat x den Coefficienten 1, der halbe Coefficient ist also $\frac{1}{2}$ und das Quadrat davon $\frac{1}{4}$. Daher $x^2 - x + \frac{1}{4} = 42 + \frac{1}{4}$, und $x - \frac{1}{2} = \pm \sqrt{(42 + \frac{1}{4})}$. Wenn man das, was hinter dem Wurzelzeichen stehet, zu einer Benennung bringet, so ist $x - \frac{1}{2} = \pm \sqrt{\frac{169}{4}}$. Hieraus läßt sich die Wurzel ziehen; und sie ist $= \pm \frac{13}{2}$. Daher $x - \frac{1}{2} = \pm \frac{13}{3}$, und $x = \frac{1}{2} \pm \frac{13}{2}$, oder $= \frac{14}{2} = 7$; und wenn man $-\frac{13}{2}$ nehmen wollte, so wäre $x = -\frac{12}{2} = -6$.

Probe. $x^2 = 49$, und da $x + 42 = 7 + 42 = 49$; so ist 7 die verlangte Zahl. Will man -6 als die verlangte Zahl annehmen, so ist $x^2 = 36$ und $x + 42 = -6 + 42 = 36$. Folglich thut $-b$ der Gleichung auch ein Genüge.

§. 127.

§. 127. Aufg. Titia gebahr einen Sohn im 4ten Jahr ihres Alters. Multiplicirt man das Alter des Sohnes mit dem gegenwärtigen Alter der Mutter, so kömmt das Alter Mathusalah, des Aeltesten unter allen Menschen heraus, der 969 Jahr gelebt hat.

Aufl. Es sey des Sohns Alter $= x$
so ist der Mutter Alter $= x + 40$

das Produkt $= x^2 + 40x = 969.$

Addirt man beiderseits das Quadrat des halben Coefficienten von x, so ist $x^2 + 40x + 400 = 969 + 400 = 1369.$

$$x + 20 = \pm\sqrt{1396} = \pm 37$$
$$x = -20 \pm 37$$
$$x = 17.$$

Folglich der Mutter gegenwärtiges Alter $= 17 + 40.$

Hier ist nicht verstattet, die Wurzel negativ zu nehmen, oder -20 und -37; obgleich diese Zahlen die Gleichung ebenfalls auflösen. Denn es wird das Alter eines Menschen gesucht, und da leidet es der Begriff der Sache nicht, daß man es negativ nimmt.

§. 128 Zus. Wenn aus einer negativen Zahl die Quadratwurzel gezogen werden soll, so wird etwas unmögliches verlangt. Gelangt man daher in der Auflösung quadratischer Gleichungen auf solche Wurzeln, so

zeigt selbige an, daß die Aufgabe etwas unmögliches verlange. Es sey z. E. eine Zahl zu finden, daß, wenn man zu ihrem Quadrate 21 addirt, diese Summe der Zahl sechsmal genommen gleich sey. Da also $x^2 + 21 = 6x$; so ist $x^2 - 6x = -21$. Und $x^2 - 6x + 9 = -21 + 9$, oder $x^2 - 6x + 9 = 12$. Folglich $x - 3 = \pm\sqrt{-12}$ und $x = 3 \pm \sqrt{-12}$. Es lassen sich also keine Zahlen angeben, wodurch der Aufgabe ein Genüge geschehe. Wollte man aber die unmögliche Zahl $3 + \sqrt{-12}$ oder $3 - \sqrt{-12}$ als die Verlangte ansehen, so hat selbige die erfoderliche Eigenschaft.

Denn man mache das Quadrat von

$$\begin{array}{l} 3 + \sqrt{-12} \\ 3 + \sqrt{-12} \\ \hline 9 + 3\sqrt{-12} \\ \quad + 3\sqrt{-12} - 12 \\ \hline 9 + 6\sqrt{-12} - 12 \end{array}$$

oder $-3 + 6\sqrt{-12}$ wird 21 dazu addirt

$$\begin{array}{l} 21 \\ \hline 18 + 6\sqrt{-12}. \end{array}$$

Man nehme die Größe $3 + \sqrt{-12}$ sechsmal; so ist $18 + 6\sqrt{12}$, welches aber, wie gesagt, unmögliche Größen sind.

§. 129.

§. 129. Zus. Eine ausführliche Untersuchung dieser Lehre anzustellen, verstattet die Bestimmung der ersten Anfangsgründe nicht. Die Auflösung höherer Gleichungen, welche in der That mehr Schwierigkeiten haben, können aus diesem Grunde noch weniger vorgetragen werden; und sie wird auch von vielen Schriftstellern, die nur Anfangsgründe geschrieben haben, ausgelassen.

Auch das will ich bemerken. Ein Anfänger wird nicht allemal jede Aufgabe, die nur auf eine Gleichung vom ersten oder zweyten Grad führt, auflösen können; wenn er gleich die Methode vollkommen verstehet, wie solche Gleichungen aufgelöset werden. Denn, um solche Aufgaben aufzulösen, werden oft Kenntniße der angewandten Mathematik, als z. E. Mechanik, Optik rc. selbst der Physik erfodert. Wird aber ein Lehrling auch einst diese nützliche Wissenschaften studiren, so kann er die Algebra auf ihre Lehren anwenden. Daher sind auch zu den Aufgaben im Vorhergehenden nur solche Beispiele gewählet worden, die sich ohne diese Wissenschaften verstehen lassen. Man irret also, wenn man glauben wollte, die Algebra ließe sich nur auf ähnliche Exempel, vergleichen vorher da vorgetragen worden, anwenden.

Anhang

Einer kurzen Geschichte der Buchstabenrechnung und Algebra.

Da fast alle Wissenschaften ihren Namen aus dem Griechischen herleiten; so macht die Algebra eine Ausnahme. Dieses Wort stammt aus dem Arabischen her. Mit der Rechenkunst haben wir auch in der That einen großen Theil der algebraischen Regeln von den Arabern erhalten erhalttn. Doch war die Algebra vor diesem bloß eine besondere Anwendudg der Rechenkunst; so wie irgend heute zu Tage die Regel Detri, die Regel Quinque u. s. w. Sie wurde auch daher in der gemeinen Rechenkunst vorgetragen. Man nannte sie die Regel Coß. Die Zeichen, derer man sich bediente, und die Namen, wodurch man die Dignitäten unterschied, waren beschwerlich, und zu den Operationen nicht bequem genug. Die älteste Nachricht, so wir von algebraischen Kunstgriffen haben, finden wir beym Diophantus, in seinen libris Arithmeticorum. Einige Lehren dieser Algebra werden noch jetzt mit Nutzen gebraucht; und seine gegebene Anweisung wird Ars Diophantea genannt. Diophantes lebte im zweyten Jahrhundert nach Chr. Geb. zu Kaiser Antonius und Julians Zeiten zu Alexandrien; und er behauptet unter den einsichtsvollen Alten gewiß einen ansehnlichen Rang.

Von

Von seinen 13 Büchern sind nur noch 6 vorhanden, die Xylander aus dem Griechischen ins Lateinische übersetzte, und im Jahr 1575 herausgab. Da aber Xylander den griechischen Text nicht an allen Orten richtig übersetzt hatte; so veranstaltete Caspar Bachet im Jahr 1621 eine neue Auflage, erklärte das Original beßer, vermehrte es mit Anmerkungen, und ließ den griechischen Text beydrucken.

Doch ehe noch diese Bücher des Diophantes bekannt waren, hatte schon im Jahr 1494 der Minorite **Lucas Paciolus**, ein Italiäner von Geburt, der insgemein nach seinem Ordensnamen Lucas de Burgo sancti sepulchri genannt wird, zu Venedig ein Buch unter dem Titel herausgegeben: Summa Arithmeticae & Geometriae, proportionumque, & proportionalitatum, wo er im achten Buche die Algebra kurz vortrug, und zwar so, wie sie von den Arabern gelehrt worden ist. Nachher machte Adam Riese ein bekannter Rechenmeister, und Michael Stiefel, ein Prediger in Preußen diese algebraischen Lehren unter den Deutschen gemeiner. Man war aber zu dieser Zeit nur bis auf die Auflösung quadratischer Gleichungen gekommen; und doch war diese Coß, oder cossische Rechnung ungleich schwerer, als die heutige Algebra, weil die Zeichen und Kunstwörter, derer sie sich bedienten, nicht so bequem waren, als die heutigen. Wer derohalben dergleichen Bücher der Cossisten lesen will,

der muß sich erst besonders mit ihren Kunstwörtern und Zeichen bekannt machen.

Der Italiäner Scipio ferreus erfand eine Art, die Cubische, oder Gleichungen vom dritten Grade aufzulösen, welche Anweisung heut zu Tage gemeiniglich die cardanische Regel genannt wird; weil sie Cardanus in seiner Arte magna, quam vulgo cossam vocant, seu Regulis Algebrae zu erst im Jahre 1545. bekannt machte. Zu letzt hat noch Raphael Bombelli im Jahre 1579. in seiner Algebra, die er italiänisch geschrieben, aus den Erfindungen des Ludouici ferrauiensis einen Weg gezeigt, wie man Gleichungen vom vierten Grade auflösen könne. Bis jetzt ist man auch nicht weiter gekommen. Man hat noch keine Regeln entdeckt, wie Gleichungen von einem höhern Grade, als vom vierten, in allen Fällen könnten aufgelöset werden.

Nach diesem bekamm die Algebra eine neue Gestalt, die nicht wenig zu ihrer Vollkommenheit beytrug. Franz Vieta, ein grosser französischer Mathematiker, von Fontenai in Poitou gebürtig, der Requetenmeister bey der Königin Margaretha war, gebrauchte zu erst im Jahre 1590 in algebraischen Rechnungen die großen Buchstaben des Alphabets; und nach dieser Zeit bekamm die Buchstabenrechnung, und selbst die Algebra, den Namen Algebra speciosa, Arithmetica speciosa, Arithmetica vniuersalis, Arithmetica li-

teralis

teralis, Calculus literalis. Der Engländer Guilielmus Oughtred in Claue mathematica bediente sich der Erfindung des Vieta; doch bezeichnete er die Potenzen auf eine kürzere Art. Thomas Harriot ein Engländer, der im Jahre 1621 starb, gab zu erst der Buchstabenrechnung die Gestalt, die sie noch jetzt hat. Er hat nicht allein statt der bisher üblich gewesenen großen Buchstaben, kleine eingeführt; sondern auch in der Multiplication die Buchstaben zu erst, ohne ein Zeichen zu gebrauchen, neben einander gesetzt, um das Product anzuzeigen. Man siehet dieses aus seiner Praxi artis analyticae, die Walterus Warner her-heraus gab. Nach der Hand machte der berühmte französische Mathematiker des Cartes, oder Cartesius noch diese Verbeßerung, daß er die Potenzen auf die jetzt übliche Art zu bezeichnen lehrte; und überdieß wandte er hauptsächlich die algebraischen Rechnungen auf die höhere Geometrie. Endlich wurde die Algebra auf den höhsten Gipfel von Isaak Newton, einem Engländer, und Gottfried von Leibnitz, einem Deutschen gebracht. In Buchstabenrechnungen führten sie die unbestimmten Exponenten ein. Ersterer entdeckte verschiedene höchst wichtige Sätze, ja beide erfanden überdieß ganz neue Rechnungsarten.

Die Verdienste großer Männer um einzelne Lehren der Algebra können hier nicht erzählt werden, da man noch keinen Begriff von dem Nutzen haben kann,

den solche Entdeckungen verschaft haben. Doch will ich dieses noch bemerken. Die eigentliche Algebra ist auf die Geometrie, sonderlich auf die Höhere ja auf alle Theile der Mathematik mit dem größten Nutzen angewandt worden; und auch die Alten hatten schon Kunstgriffe, die diesen einiger massen ähnlich waren, wie man unter andern aus Euklides und Pappus ersehen kann. Doch erst von Newton, Leibnitz, den zween Brüdern Bernoulli, dem noch jetzt lebenden unvergleichlichen Hrn. Leonhard Euler, durch diese große Genies ist sie zu einer Höhe gebracht worden, in welcher wir sie mit Erstaunen erblicken, wie Abbt von der ganzen Mathematik sagt. Schon Wolf schrieb in der Vorrede zu seiner Analysis: Apicem totius eruditionis humanae conscendimus Analysin tradituri. Was würde er gesagt haben, wenn er zu den Zeiten eines Clairaut, Kästner, Segner, la Grange und vieler anderer unvergeßlichen Männer gelebt hätte, derer Verdienste so bekannt sind, daß sie nicht erst von mir angerühmt zu werden brauchen. Wer in der Algebra sich weiter umsehen will, der studire die Schriften derselben.

Inhalt.

Einleitung. Seite. 145

I. Abschnitt. Von den entgegengesetzten Größen. 147

II. Abschnitt. Von der Rechnung mit entgegengesetzten Größen und Buchstaben. 150

III. Abschnitt. Von der Buchstabenrechnung in Brüchen. 164

IV. Abschnitt. Von den Potenzen. 166

V. Abschnitt. Von der Rechnung mit Wurzelgrößen. 176

VI. Abschnitt. Von allgemeinen Lehren der geometrischen Proportionen und ihrer Anwendung. 185

VII. Abschnitt. Von der Lehre der Proportionen oder Reihen und von allgemeinen Begriffen der Logarithmen. 205

VIII. Abschnitt. Von den ersten und leichtesten Lehren der Gleichungen in der Algebra. 227

IX. Abschnitt. Von den Quadratischen Geichungen, oder von Gleichungen vom zweyten Grade. 254

Anhang einer kurzen Geschichte der Buchstabenrechnung und Algebra. 264

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Gruber, Leonhard,

Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra zum Gebrauch der Schulen in den churbaierischen Landen

München 1776

Regensburg, Staatliche Bibliothek -- 999/Philos.1792
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11110568-3
VD18 1069384X-003